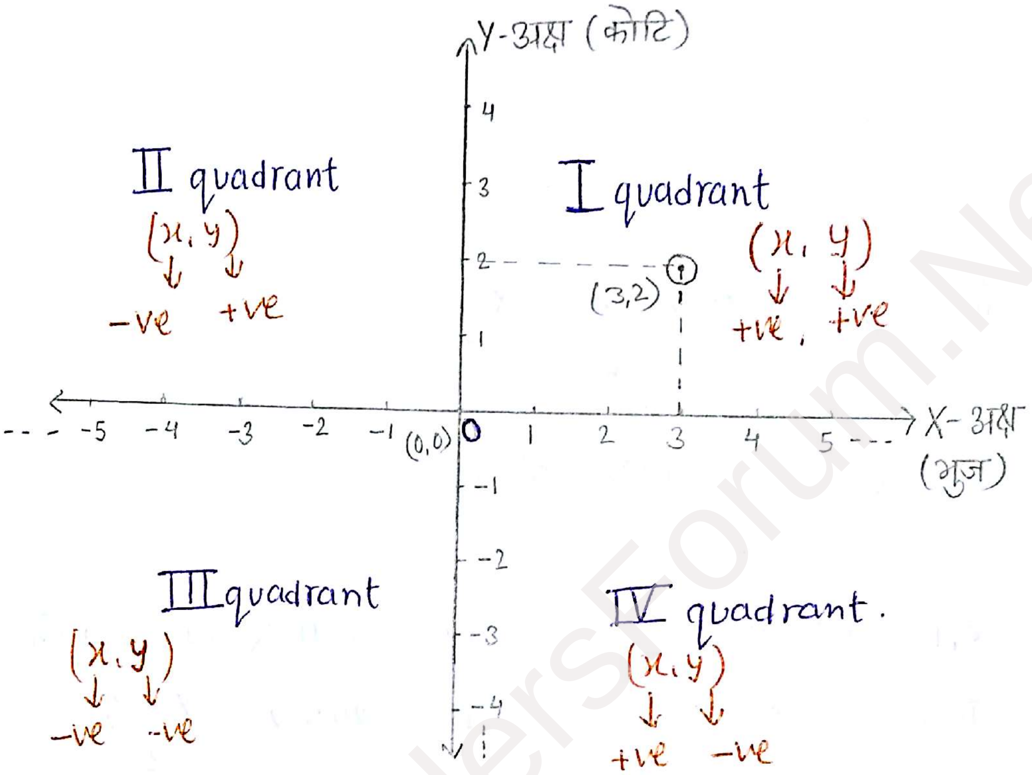
निर्देशांक ज्यामिति

CO-ORDINATE GEOMETRY



#X-Y तल में स्थित दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी $PQ = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

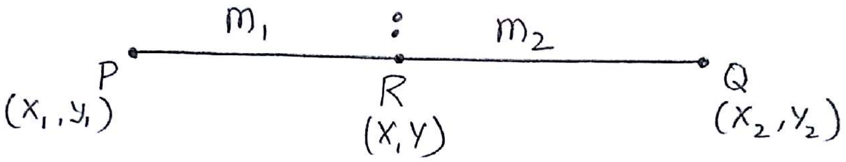
#$$d = \sqrt{(x\text{-निर्देशांको का अंतर})^2+(y\text{- निर्देशांकों का अंतर})^2}$$

बिन्दु $P(x, y)$ की मूल बिन्दु $O(0,0)$ से दूरी →

$$\boxed{d = \sqrt{x^2+y^2}}$$

Ex: $P(3,2)$ की मूल बिन्दु से दूरी $= \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ ans..

यदि बिन्दु $P(x_1, y_1)$ व $Q(x_2, y_2)$ को मिलाने वाली रेखा को कोई बिन्दु $R(x, y)$, m_1 तथा m_2 अनुपात में अन्तः विभाजित कर रहा है तो बिन्दु $R(x, y)$ के निर्देशांक :–

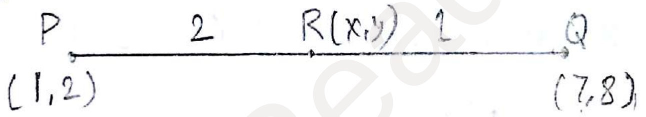


निर्देशांक $x = \dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1+m_2}$

$y = \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1+m_2}$

$\Rightarrow$ यदि $R(x, y)$, दोनों बिन्दुओं P तथा Q का मध्य बिन्दु हो तो निर्देशांक $x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$ व निर्देशांक $y = \dfrac{y_1+y_2}{2}$.

Ex :-



हो तो बिन्दु R के निर्देशांक = ?

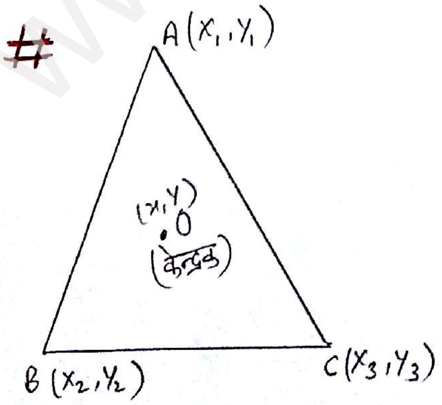
Solution :-

$x = \left(\dfrac{2\times7 + 1\times1}{2+1}\right) = 5$

$y = \left(\dfrac{2\times8 + 1\times2}{2+1}\right) = 6$

अतः R के निर्देशांक = R(5, 6) होंगे।

#



यदि $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ व $C(x_3, y_3)$ बिन्दु किसी त्रिभुज के तीनों शीर्ष हो तो –

Δ के केन्द्रक के निर्देशांक →

$\Rightarrow x = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$

$\Rightarrow y = \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$ होंगे।

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\left|\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]\right| \leftarrow \text{mode}$$

⟹ यदि ΔABC का क्षेत्रफल $= 0$ हो तो तीनों बिन्दु संरेख होंगे।

सरल रेखा :-

# सरल रेखा का समीकरण $\boxed{ax+by+c=0}$

→ सरल रेखा $x=0$, Y-अक्ष को दर्शाती है।

→ सरल रेखा $y=0$, X-अक्ष को दर्शाती है।

⟹ स्थिति -① जब $b=0$ हो तो

$ax = -c$

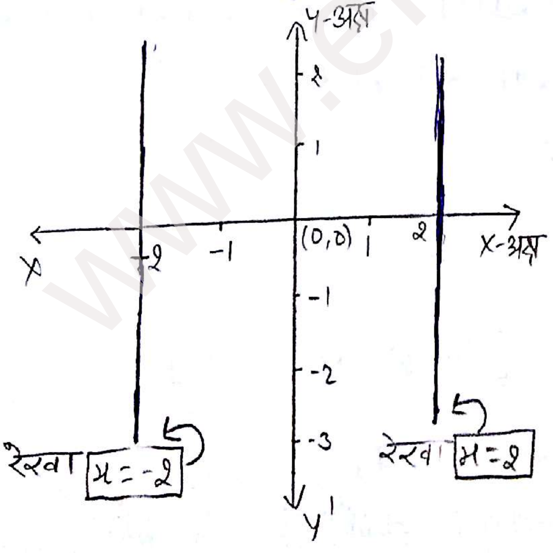
$x = \frac{-c}{a}$

or $\boxed{x = C}$

यह सरल रेखा →
X-अक्ष के लम्बवत
व Y-अक्ष के समान्तर होगी।

Ex:- $X=2$ or $X=-2$ रेखा

⇓



⟹ स्थिति -② जब $a=0$ हो तो

$by = -c$

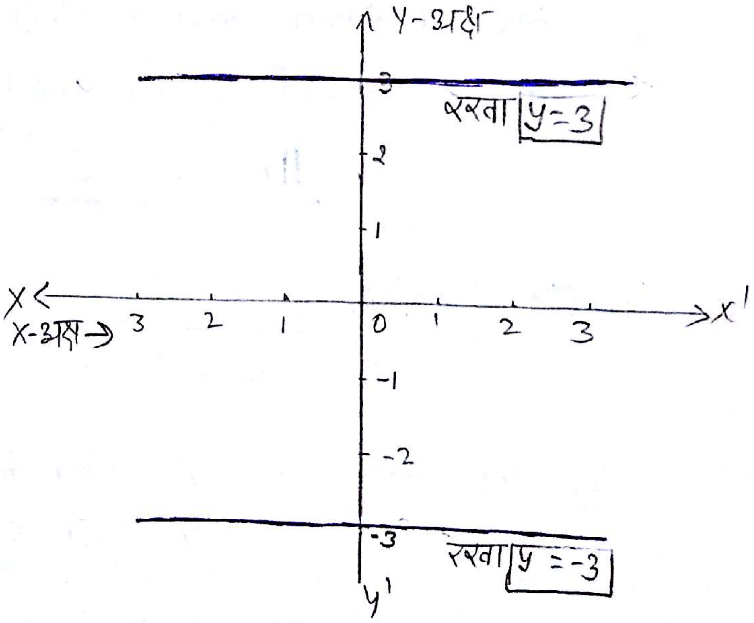
$y = \frac{-c}{b}$

or $\boxed{y = C}$

यह सरल रेखा →
X-अक्ष के समान्तर व
Y-अक्ष के लम्बवत होगी।

Ex:- $y=3$ or $y=-3$ रेखा

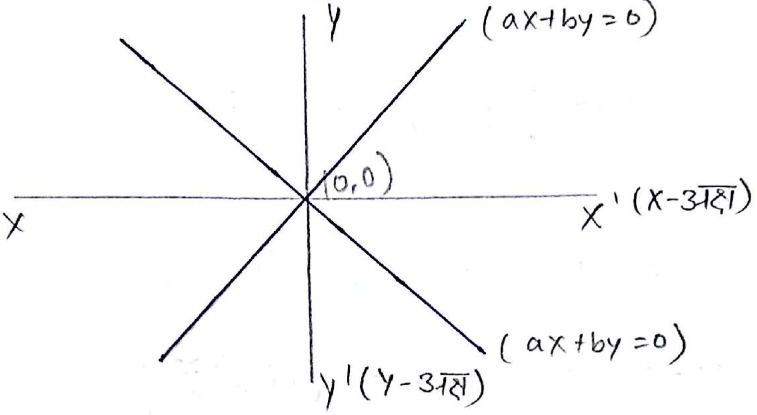
⇓



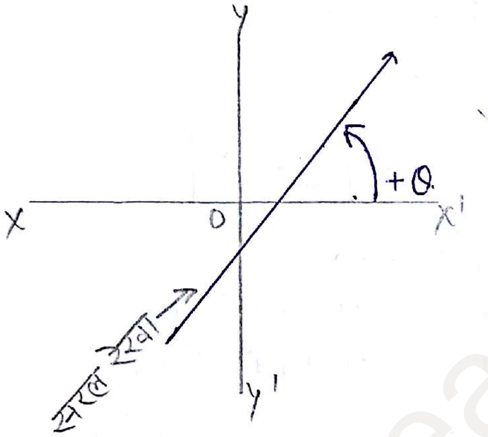
स्थिति-③ - जब c = 0 हो तो →

$ax+by=0 \Rightarrow \boxed{ax=by}$ or $\boxed{x=y}$

→ यह सरल रेखा मूल बिन्दु से होकर गुजरेगी।



⇒ सरल रेखा की प्रवणता / ढाल / slope :-



Angle θ° →

Anti clock wise (वामावर्त) दिशा में → +ve

Clock wise (दक्षिणावर्त) दिशा में → −ve

होता है।

⇒ कोई भी सरल रेखा x-अक्ष के साथ वामावर्त दिशा में (+ve angle) कोण θ° बनाती है तो सरल रेखा की ढाल →

$\boxed{m = \tan\theta}$ होगी।

# स्थिति-① जब θ° = 0° हो,

तब slope / ढाल = 0 [$\tan\theta° = \tan 0° = 0$]

⇒ यह सरल रेखा x- अक्ष के समान्तर व y- अक्ष के लम्बवत होगी।

स्थिति-②:- जब $\theta° = 90°$ हो,

तब slope / ढाल = ∞ (अनन्त) [$\because \tan 90° = \infty$]

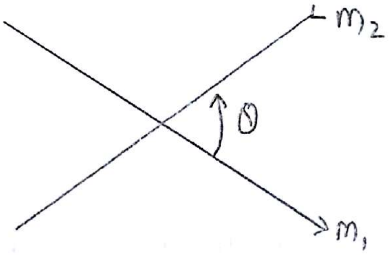
→ यह सरल रेखा x-अक्ष के लम्बवत व y-अक्ष के समान्तर होगी।

स्थिति-③:- जब $\theta = 45°$ हो,

तब slope / ढाल = 1 होगी [$\because \tan 45° = 1$]

→ यह प्रवणता की आदर्श स्थिति है।

जब m_1 ढाल वाली सरल रेखा, m_2 ढाल वाली रेखा को एक कोण (angle) $\theta°$ पर प्रतिच्छेद करेगी →



$$\boxed{\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}}$$

→ स्थिति-①: जब $\theta = 0°$ / दोनों रेखायें समान्तर हो तो –

$$\tan\theta = 0° = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1 = m_2}$$

दोनों रेखाओं की प्रवणतायें समान होगी।

→ स्थिति-②: जब $\theta = 90°$ / दोनों रेखाये लम्बवत हो तो –

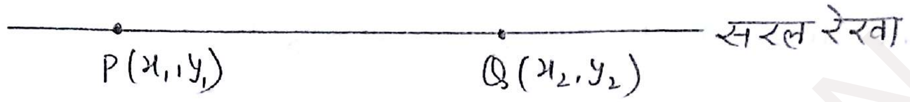
$$\cot\theta = \frac{1 + m_1 m_2}{m_1 - m_2} \Rightarrow \boxed{1 + m_1 m_2 = 0}$$

$$\boxed{m_1 m_2 = -1} \text{ or } \boxed{m_1 = -\frac{1}{m_2}} \text{ or } \boxed{m_2 = -\frac{1}{m_1}}$$

m ढाल/slope वाली सरल रेखा का समीकरण जो बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरती है -

$$\boxed{(y - y_1) = m(x - x_1)}$$

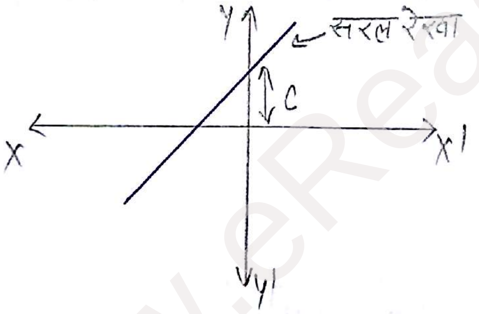
दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ से गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण →



$$\boxed{(y - y_1) = \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right](x - x_1)}$$

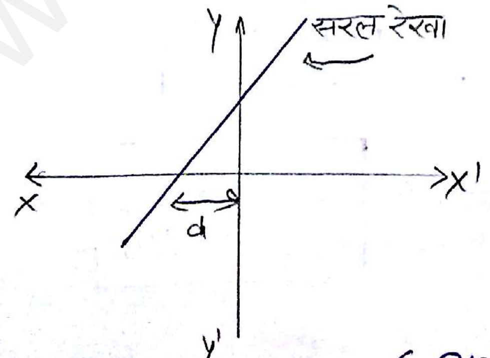
यहाँ ढाल $\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ है।

उस सरल रेखा का समीकरण जो y-अक्ष पर c इकाई का अंत: खण्ड काटती है व जिसकी प्रवणता m हो तो →



$$\boxed{y = mx + c}$$

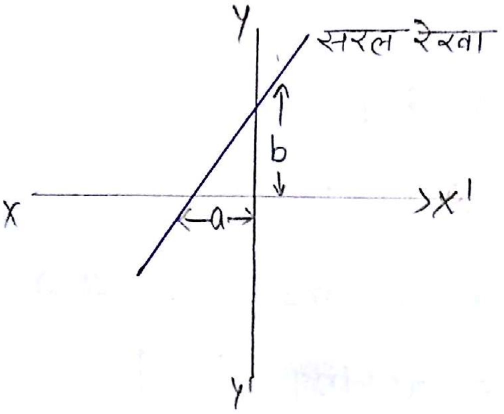
उस सरल रेखा का समीकरण जो x-अक्ष पर d-इकाई का अंत: खण्ड काटती है व जिसकी प्रवणता m है तो समी.-



$$y = m(x - d)$$

$$\boxed{y = mx - md}$$

जब सरल रेखा x-अक्ष पर 'a' तथा y-अक्ष पर 'b' इकाई का अन्तःखण्ड काटती हो तो उस रेखा का समीकरण –



$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

यदि किसी रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई 'P' हो तथा यह लम्ब x-अक्ष के साथ θ-कोण बनाये तो उस रेखा का समीकरण :-

$$\boxed{x\cos\theta+y\sin\theta=P}$$

जब दो रेखाओं की समी॰

$a_1x+b_1y+c_1=0$

$a_2x+b_2y+c_2=0$ दी गई हो –

⇒ स्थिति-① → जब $\boxed{\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}}$ हो तो रेखायें –

⇒ अतिव्यापी / Overlapping / आच्छादी होंगी।

व हल – अनंत / असीम हल

व प्रतिच्छेद बिन्दु – अनंत / Infinite होंगे।

⇒ स्थिति-② → जब $\boxed{\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}}$ हो तो रेखाये-

⇒ समान्तर / अप्रतिच्छेदी रेखायें होंगी।

→ कोई प्रतिच्छेद बिंदु नहीं व कोई हल नहीं होगा।

⇒ स्थिति -③ जब $\boxed{\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}}$ हो तो रेखाये -

→ परस्पर प्रतिच्छेदी / असमान्तर होगी,
व हल / solution – अद्वितीय / निश्चित / Unique होंगे।

Ex:- रेखाये $3x+4y+5=0$ व $9x+12y+15=0$ होंगी →
Soln:- → परस्पर अतिव्यापी / overlapping होंगी।

यदि $a_1x+b_1y+c_1=0$ व
$a_2x+b_2y+c_2=0$ रेखाओं की समी. हो तो -

↗ परस्पर समान्तर होगी यदि $\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}}$ हो।

↗ परस्पर लम्बवत होंगी यदि $\boxed{a_1a_2 = -b_1b_2}$
या
$\boxed{a_1a_2+b_1b_2=0}$ हो

रेखा $ax+by+c=0$ के समान्तर रेखा का समीकरण जो बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरती है -

$$\boxed{ax+by+K=0}$$

Ex:- रेखा $3x+4y+5=0$ के समान्तर रेखा का समी. क्या होगा, जो बिन्दु (1, 2) से गुजरती है ?

Soln:- समान्तर रेखा का समी. ⇒ $3x+4y+K=0$ —①
यह (1, 2) से गुजरती है अतः
$3\times1+4\times2+K=0$
$K=-11$ —②
अतः समी. ① व ② से समान्तर रेखा ⇒ $3x+4y-11=0$ होगी।
ans

रेखा $ax+by+c=0$ के लम्बवत रेखा का समीकरण जो (x_1, y_1) से गुजरती है –

$$\boxed{bx-ay+k=0}$$

Ex:- रेखा $3x+4y+5=0$ के लम्बवत रेखा का समी॰ ज्ञात करो, जो $(1,2)$ से गुजरती है।

Soln:- लम्बवत रेखा का समी॰ ⇒ $4x-3y+k=0$ —①

यह $(1,2)$ से गुजरती है अतः:-

$$4\times1-3\times2+k=0$$

$$K=2 \quad \text{—(II)}$$

अतः समी॰ ① व ② से समी॰ ⇒ $4x-3y+2=0$ होगा।

ans

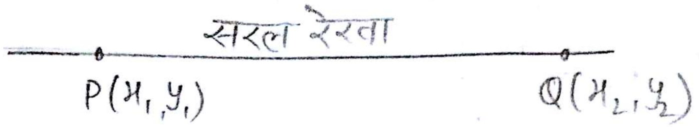
रेखा $ax+by+c=0$ की (x_1, y_1) से न्यूनतम /लम्बवत दूरी–

$$\boxed{d=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|} \longrightarrow \text{mode}$$

$ax+by+C_1=0$ व $ax+by+C_2=0$ दोनो समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी

$$\boxed{d=\left|\frac{C_1-C_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|} \longrightarrow \text{mode}$$

###



दो बिन्दुओं $P(x_1,y_1)$ व $Q(x_2,y_2)$ से गुजरने वाली सरल रेखा -

X-अक्ष पर विभाजित होगी → $\boxed{-\frac{y_1}{y_2}}$ अनुपात में

Y-अक्ष पर विभाजित होगी → $\boxed{-\frac{x_1}{x_2}}$ अनुपात में ।

Ex :- P(3,4), व Q(-5,8) से गुजरने वाली रेखा

X-अक्ष पर → $-(\frac{-3}{5}) = \frac{3}{5} \Rightarrow 3:5$ ✓ व

Y-अक्ष पर → $-(\frac{4}{8}) = -\frac{1}{2}$ ✗ अनुपात में विभाजित होगी।

Note :- जब अनुपात -ve हो तो वह उस अक्ष (x या y-अक्ष) को विभाजित नहीं करेगा।

आपके उज्ज्वल भविष्य की शुभकामनाओं सहित -

→ @KK

→ अनिल कुमार कुमावत