2017

برنامج

رحلتي في السادس

ملزمة :

الرياضيات

لل6 الاحياء

للأستاذ

امين فرهود

الرياضيات

السادس العلمي

الفصل الخامس
المعادلات التفاضلية

برنامج رحلتي في السادس

2016 - 2017

حملة شبابنا

من الشباب والى الشباب

حملة شبابنا

برنامج رحلتي في السادس

1 ان هذا البرنامج هو احد مشاريع حملة شبابنا ويهدف الى مساعدة طلبة السادس من خلال توفير ما يحتاجونه ومن دون مقابل ...

2 ان كل الخدمات المقدمة من قبل البرنامج هي مجانية من دون اي مقابل ربحي انما تهدف لغرس التعاون بين الناس لذا يمنع استغلالها لأي اغراض ربحية ...

4 يوجد العديد من الاعمال والانشطة التي يقدمها البرنامج ومنها : التدريس الخصوصي الالكتروني المجاني والنصائح المصورة لأفضل المدرسين وتوفير ملازم خاصة لجميع فروع السادس الأدبي والعلمي بفرعيه ...

5 لغرض الحصول على جميع الملازم والنصائح والاسئلة وغيرها من خدمات البرنامج ...زورونا على مواقعنا :

برنامج رحلتي في السادس

You Tube

برنامج رحلتي في السادس

الفصل الخامس
المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية الاعتيادية
هي المعادلة التفاضلية التي يكون فيها المتغير y يعتمد فقط على x مثل

① $\frac{dy}{dx} = 2y + 7x$

② $(y'')^3 + y' - x^2 \ln x = 1$

③ $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = y + 1$

④ $y^4 + \cos y + x^2 y y' = 0$

رتبة المعادلة التفاضلية
وهي رتبة أعلى مشتقة.

درجة المعادلة التفاضلية
وهي أكبر أس مرفوع له أعلى مشتقة.

Ex:

$\frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$ الرتبة الأولى لأن أعلى مشتقة هي (1)
الدرجة الأولى لأن أس أعلى مشتقة (1)

$\frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 3xy + 7$ الرتبة الثانية من الدرجة (1) وهكذا

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = x^3 - 5$ الرتبة الأولى من الدرجة الرابعة

$y'' + 2y(y')^3 = 0$ الرتبة الثانية الدرجة الأولى

$(y'')^2 = \sqrt{1 + (y')^2}$ نربع الطرفين

$(y'')^4 = 1 + (y')^2$ الرتبة الثانية الدرجة الرابعة

قال الإمام الصادق عليه السلام
اكتبوا حتى تحفظوا

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية

هو عبارة عن علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث
تكون خالية من المشتقات
ومعرفة على فترة معينة
تحقق المعادلة التفاضلية

يعني من الحرف هل ان العلاقة المعطاة حل للمعادلة المعطاة
نلاحظ الرتبة (المشتقات) الموجودة في المعادلة ونكتبها
ثم نعوض تلك الرتبة والعلاقة في المعادلة وكما في
المثال التالي

مثال ١: برهن ان $y=3\cos 2x+2\sin 2x$ هو حل للمعادلة
التفاضلية $y''+4y=0$

الحل / نلاحظ هنا في المعادلة وجود (y'') اذن نشتق
العلاقة مرتين.

$y=3\cos 2x+2\sin 2x$

$y'=-3\sin 2x(2)+2\cos 2x(2)$

$y'=-6\sin 2x+4\cos 2x$

$y''=-6\cos 2x(2)-4\sin 2x(2)$

$y''=-12\cos 2x-8\sin 2x$

$y''+4y=0$ اذن تحقق المعادلة

$L.H.S=y''+4y$

$=(-12\cos 2x-8\sin 2x)+4(3\cos 2x+2\sin 2x)$

$=-12\cos 2x-8\sin 2x+12\cos 2x+8\sin 2x$

$=0$

$=R.H.S$

مثال ٢: هل $y^2=3x^2+x^3$ هو حل للمعادلة $yy''+(y')^2-3x=5$

الحل / نلاحظ من المعادلة وجود (y'') اذن نشتق مرتين

أمين فرهود الركابي
07804206869

$y^2 = 3x^2 + x^3$

$2y\,y' = 6x + 3x^2$ مشتقة اولى

$2y\,y'' + y'(2)\,y' = 6 + 6x$ مشتقة ثانية

$[\div 2]$

$y\,y'' + (y')^2 = 3 + 3x$

$y\,y'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq R.H.S$ ∵

∴ $y^2 = 3x^2 + x^3$ ليست حلاً للمعادلة اعلاه

مثال ٥: بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حل للمعادلة

$y'' + y' - 6y = 0$

الحل/

$y = e^{2x} + e^{-3x}$

$y' = e^{2x}(2) + e^{-3x}(-3)$

$= 2e^{2x} - 3e^{-3x}$

$y'' = 2e^{2x}(2) - 3e^{-3x}(-3)$ ∵

$= 4e^{2x} + 9e^{-3x}$

L.H.S: $y'' + y' - 6y = 4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6(e^{2x} + e^{-3x})$

$= 4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x}$

$= 6e^{2x} - 6e^{2x} + 9e^{-3x} - 9e^{-3x}$

$= 0 + 0 = 0 = R.H.S$

∴ $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية اعلاه.

تمارين (1-5) P222

س1/ بين رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية

a) $(x^2 - y^2) + 3xy\dfrac{dy}{dx} = 0$ الرتبة الاولى والدرجة الاولى

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - 5y = 7$ الرتبة الثانية الدرجة الاولى

c) $(y''')^3 - 2y' + 8y = x^3 + \cos x$ الرتبة الثالثة الدرجة الثالثة

d) $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 0$ الرتبة الثالثة الدرجة الثانية

برنامج رحلتي في السادس

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

د. هل ان $y = \sin x$ هو حل للمعادلة
$y'' + y = 0$

الحل/
$y = \sin x$
$y' = \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x$

L.H.S
$y'' + y = -\sin x + \sin x = 0 = R.H.S$
∴ $y = \sin x$ هو حل المعادلة $y'' + y = 0$

(3) د. هل ان المعادلة $S = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ هي حل للمعادلة $\frac{d^2S}{dt^2} + 9S = 0$

الحل/ $S = 8\cos 3t + 6\sin 3t$
$\frac{dS}{dt} = -8\sin 3t(3) + 6\cos 3t(3)$
$= -24\sin 3t + 18\cos 3t$
$\frac{d^2S}{dt^2} = -24\cos 3t(3) - 18\sin 3t(3)$
$= -72\cos 3t - 54\sin 3t$

L.H.S $\frac{d^2S}{dt^2} + 9S = -72\cos 3t - 54\sin 3t + 9(8\cos 3t + 6\sin 3t)$
$= \underline{-72\cos 3t} - \underline{54\sin 3t} + \underline{72\cos 3t} + \underline{54\sin 3t})$
$= 0 = R.H.S$
∴ S هو حل للمعادلة اعلاه.

ت (4) هل ان $y = x + 2$ حل للمعادلة $y'' + 3y' + y = x$
الحل/ $y = x + 2$
$y' = 1$
$y'' = 0$
L.H.S $y'' + 3y' + y = 0 + 3(1) + x + 2$
$= 3 + x + 2$
$= 5 + x \neq R.H.S$ ليس حلاً

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

س (5) هل ان $y = \tan x$ حلاً للمعادلة $y'' = 2y(1+y^2)$

الحل/

$y = \tan x$

$y' = \sec^2 x$

$y'' = 2 \sec x \sec x \tan x$

$y'' = 2 \sec^2 x \tan x$

R.H.S

$2y(1+y^2) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$

$= 2 \tan x \sec^2 x = L.H.S$

س (6) هل ان $2x^2 + y^2 = 1$ حلاً للمعادلة $y^3 y'' = -2$

الحل/

$2x^2 + y^2 = 1$

$4x + 2y y' = 0 \quad] \div 2$

$2x + y y' = 0$

$y y' = -2x$

$y' = \frac{-2x}{y} \quad \ldots (1)$

$2 + y y'' + y' y' = 0$

$2 + y y'' + (y')^2 = 0 \quad \ldots (2)$

نعوض (1) في (2)

$2 + y y'' + \left(\frac{-2x}{y}\right)^2 = 0$

$2 + y y'' + \frac{4x^2}{y^2} = 0 \quad \times y^2$

$2y^2 + y^3 y'' + 4x^2 = 0$

$y^3 y'' = -4x^2 - 2y^2$

$y^3 y'' = -2(2x^2 + y^2)$

$= -2(1) = -2 \quad R.H.S$

أمين فرهود الركابي
07804206869

ت(7) اذا كان $yx=\sin 5x$ حلاً للمعادلة $x y''+2y'+25yx=0$

الحل/

$yx=\sin 5x$

$y(1)+xy'=5\cos 5x$

$y+xy'=5\cos 5x$

$y'+xy''+y'=-25\sin 5x \longrightarrow \boxed{yx=\sin 5x}$

$xy''+2y'+25(yx)=0 \quad R.H.S$

ت(8) بين ان $y=ae^{-x}$ هو حلاً للمعادلة $y'+y=0$ حيث $a\in R$

الحل/

$y=ae^{-x}$

$y'=ae^{-x}(-1)$

$y'=-ae^{-x}$

L.H.S

$y'+y=-ae^{-x}+ae^{-x}$

$=0=R.H.S$

ت(9) بين ان $\ln|y|=x^2+c$ هو حلاً للمعادلة $y''=4x^2y+2y$

الحل/

$\ln|y|=x^2+c$

$\frac{y'}{y}=2x \Rightarrow y'=2xy \quad ...(1)$

$y''=2xy'+2y \quad ...(2)$

نعوض (1) في (2)

$y''=2x(2xy)+2y$

$y''=4x^2y+2y$

$\therefore$ تمثل حلاً للمعادلة

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

حل المعادلات التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات

كل المعادلات التفاضلية بهذه الطريقة سوف نقوم بفصل الحدود التي تحتوي على (x) فقط مع dx في جهة والحدود التي تحتوي على (y) فقط مع dy في جهة اخرى
نحصل على معادلتين في طرفين
ثم نكامل كل طرف وكما في الامثلة

مثال: حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x+5$

الحل/

$$\frac{dy}{dx} = 2x+5$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$dy = (2x+5)\,dx$$

$$\int dy = \int (2x+5)\,dx$$

$$y = 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + 5x + c$$

$$y = x^2 + 5x + c$$

ملاحظة مهمة
حل المعادلة هو ايجاد لنا ع
بدلالة y

مثال: حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$

الحل/

$$y\,dy = (x-1)\,dx$$

$$\int y\,dy = \int (x-1)\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 - x + c \quad]\times 2$$

$$y^2 = x^2 - 2x + 2c$$

جذر الطرفين

$$y = \mp\sqrt{x^2 - 2x + 2c}$$

$$y = \mp\left(x^2 - 2x + c\right)^{\frac{1}{2}}$$

حيث $2c = c = ac$

برنامج رحلتي في السادس

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$dy = \sin x \cos^2 y \, dx$

نفصل الحد الذي يحتوي على y مع dy
والحد الذي يحتوي على x مع dx

$\div \cos^2 y$ لكل

$\dfrac{dy}{\cos^2 y} = \sin x \, dx$

$\because \dfrac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y$

$\therefore \sec^2 y \, dy = \sin x \, dx$

$\int \sec^2 y \, dy = \int \sin x \, dx$

$\tan y = -\cos x + C$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ حيث

$x = 2 \; , \; y = 9$

$\dfrac{dy}{dx} - x(y)^{\frac{1}{2}} = 0$

$y' = \dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx} = x(y)^{\frac{1}{2}}$

$(y)^{-\frac{1}{2}} dy = x \, dx$

$\int (y)^{-\frac{1}{2}} dy = \int x \, dx$

$\dfrac{(y)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{x^2}{2} + C$

$2(y)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^2 + C \quad , \; y = 9 \; , \; x = 2$

$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$

$2\sqrt{9} = \frac{1}{2}(2)^2 + C$

$6 = 2 + C$

$C = 4$ نعوض C

$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 4 \;] \div 2$

$\sqrt{y} = \frac{1}{4}x^2 + 2$ بالتربيع $\Rightarrow y = (\frac{1}{4}x^2 + 2)^2$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$(x+2y)\,dx+(2x+3y)\,dy=0$

بالقسمة على x

$\left(\frac{x}{x}+\frac{2y}{x}\right)dx+\left(\frac{2x}{x}+\frac{3y}{x}\right)dy=0$

$\left(1+2\frac{y}{x}\right)dx+\left(2+3\frac{y}{x}\right)dy=0$

$V=\frac{y}{x}$ نفرض

$(1+2V)\,dx+(2+3V)\,dy=0$

$(1+2V)+(2+3V)\frac{dy}{dx}=0$ ---- ①

$V=\frac{y}{x} \Rightarrow y=Vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=V+x\frac{dV}{dx}$ --- ②

نعوض ② في ①

$(1+2V)+(2+3V)\left[V+x\frac{dV}{dx}\right]=0$

$(1+2V)+(2V+3V^2)+(2+3V)x\frac{dV}{dx}=0$

$(1+2V+2V+3V^2)+(2+3V)x\frac{dV}{dx}=0$

$(3V^2+4V+1)+(2+3V)x\frac{dV}{dx}=0$

$$\int\frac{3V+2}{3V^2+4V+1}\,dV=-\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{6V+4}{3V^2+4V+1}\,dV=-\int\frac{dx}{x}$$

$\frac{1}{2}\ln|3V^2+4V+1|=-\ln|x|+C$

$\because V=\frac{y}{x}$

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3y^2}{x^2}+4\frac{y}{x}+1\right|=-\ln|x|+C$

P 227

تمارين (2 - 5)

حل المعادلات التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات

س (1) حل المعادلات التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات

a.) $y' \cos^3 x = \sin x$

ج//

$\frac{dy}{dx} \cos^3 x = \sin x$

$dy \cos^3 x = \sin x \, dx$

$dy = \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

$dy = \sin x \cos^{-3} x \, dx$

$\int dy = \int \sin x \cos^{-3} x \, dx$

$y = -\frac{\cos^{-2} x}{-2} + c$

$* \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$y = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 x} + c \Rightarrow y = \frac{1}{2} \sec^2 x + c$

b.) $\frac{dy}{dx} + xy = 3x \qquad x = 1 \;,\; y = 2$

ج//

$\frac{dy}{dx} = 3x - xy$

$\frac{dy}{dx} = x(3 - y)$

$\frac{dy}{3-y} = x \, dx$

$\int \frac{dy}{3-y} = \int x \, dx$

$-\ln|3-y| = \frac{x^2}{2} + c \qquad , x = 1 \;,\; y = 2$

$-\ln|3-2| = \frac{1^2}{2} + c$

$-\ln|1| = \frac{1}{2} + c$

$0 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{(1+y^2)^{3/2}}$$

$$\int (1+y^2)^{-3/2}\, y\, dy = \int 4\, dx$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = 4x + c$$

$$\frac{-1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 4x + c$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+y^2}} = 4x + c$$

(f) $e^x dx - y^3 dy = 0$

$$y^3 dy = e^x dx$$

$$\int y^3 dy = \int e^x dx$$

$$\frac{1}{4} y^4 = e^x + c$$

بجذر الطرفين جذراً رابعاً

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\, y = \sqrt[4]{e^x + c}$$

(g) $y' = 2e^x y^3$ $\quad x = 0 \quad y = \frac{1}{2}$

ds./

$$\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3$$

$$\frac{dy}{y^3} = 2e^x dx \Rightarrow y^{-3} dy = 2e^x dx$$

$$\int y^{-3} dy = 2\int e^x dx$$

$$\frac{1}{2y^2} = 2e^x + c \Rightarrow \frac{-1}{2(\frac{1}{4})} = 2e^0 + c \Rightarrow -2 = 2 + c$$

$$c = -4$$

أمين فرهود الركابي
07804206869

$$\frac{-1}{2y^2} = 2e^{x} - 4$$

(a.) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$$

الحل/

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 - y^2 \Rightarrow xy\frac{dy}{dx} = 1 - 2y^2$$

$$\frac{xy\,dy}{dx} = 1 - 2y^2$$

$$\frac{y\,dy}{1-2y^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{y}{1-2y^2}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{-4y}{1-2y^2}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\frac{1}{4}\ln|1-2y^2| = \ln|x| + c$$

(b.) $\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$

$$\sin x \cos y \frac{dy}{dx} = -\cos x \sin y$$

$$\sin x \cos y\, dy = -\cos x \sin y\, dx$$

$$\frac{\cos y}{\sin y}\,dy = -\frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$\ln|\sin y| = -\ln|\sin x| + c$$

$$\ln|\sin y| + \ln|\sin x| = c$$

$$\sin y \sin x = e^{c}$$

(c) $x\cos^2 y\,dx + \tan y\,dy = 0$

$\tan y\,dy = -x\cos^2 y\,dx$

$\frac{\tan y}{\cos^2 y} = -x\,dx$

$\int \frac{\tan y\,dy}{\cos^2 y} = -\int x\,dx$

$\int \frac{\sin y}{\cos y\cos^2 y}\,dy = \int -x\,dx$

$\int \frac{\sin y}{\cos^3 y}\,dy = -\int x\,dx$

$\int \cos^{-3} y\,\sin y\,dy = -\int x\,dx$

$\frac{\cos^{-2} y}{-2} = -\frac{1}{2}x^2 + C$

$-\frac{1}{2}\cos^{-2} y = -\frac{1}{2}x^2 + C$

$\frac{-1}{2\cos^2 y} = -\frac{1}{2}x^2 + C$

$\frac{1}{2}\sec^2 y = \frac{1}{2}x^2 - C$

(d) $\tan^2 y\,dy = \sin^3 x\,dx$

$\int \tan^2 y\,dy = \int \sin^3 x\,dx$ $\quad * \; 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

$\int \tan^2 y\,dy = \int \sin^2 x\,\sin x\,dx$

$\int \tan^2 y\,dy = \int (1 - \cos^2 x)\,\sin x\,dx$

$\int \tan^2 y\,dy = \int \sin x\,dx - \int \cos^2 x\,\sin x\,dx$

$\tan y - y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

أمين فرهود الركابي
07804206869

(f) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2+e^y}$

$(3y^2+e^y)\,dy = \cos x\,dx$

$\int (3y^2+e^y)\,dy = \int \cos x\,dx$

$\int 3y^2\,dy + \int e^y\,dy = \int \cos x\,dx$

$y^3 + e^y = \sin x + C$

(g) $e^{x+2y} + y' = 0 \Rightarrow e^{x+2y} + \frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = -e^{x+2y}$

$\frac{dy}{dx} = -e^{x}\,e^{2y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-e^{x}}{e^{-2y}} \Rightarrow e^{-2y}\,dy = -e^{x}\,dx$

$\int e^{-2y}\,dy = \int -e^{x}\,dx$

$-\frac{1}{2}e^{-2y} = -e^{x} + C \quad (x -1)$

$\frac{1}{2}e^{-2y} = e^{x} - C$

المعادلات التفاضلية المتجانسة وحلها

هي المعادلات التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$
بمعنى انه لا نستطيع ان نحلها بطريقة فصل المتغيرات
لصعوبة اجراء عملية الفصل بينهما ، لك الطريقة بالخطوات التالية

برنامج رحلتي في السادس

① نحاول ان نجعل المعادلة بالصيغة $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ وذلك باستخدام القسمة على x^n

(2) نفرض $v = \frac{y}{x}$

③ نجد $y = xv$

④ نجد لهما $\frac{dy}{dx}$

⑤ نساوي الخطوة (4) مع الخطوة الاولى

⑥ نقلب ونستنتج

⑦ نكامل الطرفين ونجد الحل للمعادلة

مثال : حل المعادلة التالية $y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$ بالقسمة على x^2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(\frac{y^2}{x^2}) - 1}{\frac{2y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(\frac{y}{x})^2 - 1}{2(\frac{y}{x})}$$ اصبحت على شكل $f(\frac{y}{x})$

$v = \frac{y}{x}$ نفرض

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} \quad \text{---} ①$$

$v = \frac{y}{x}$

$y = xv$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \quad \text{---} ②$$

① = ②

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{3v^2 - 1}{2v}$$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1}{2v}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1}{2v}$$ الان يتم فصل المتغيرات

$$\frac{dx}{x}=\frac{2v\,dv}{v^2-1}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{2v\,dv}{v^2-1}$$

$$\ln|x|=\ln|v^2-1|+\ln|c|$$

$$\ln|x|=\ln|c(v^2-1)|$$

$$x=c(v^2-1)$$

$$\because v=\frac{y}{x}$$

$$x=c\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)\Rightarrow c=\frac{x^3}{y^2-x^2}$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{y-x}$$

نقسم الطرف الايمن على x

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}+\frac{x}{x}}{\frac{y}{x}-\frac{x}{x}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1}$$

$$v=\frac{y}{x}\qquad\frac{dy}{dx}=\frac{v+1}{v-1}\quad\text{---}(1)$$

$$v=\frac{y}{x}$$

$$y=vx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\quad\text{---}(2)$$

برنامج رحلتي في السادس

① = ②

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1}{v-1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1}{v-1} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1-(v^2-v)}{v-1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1-v^2+v}{v-1} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{2v-v^2+1}{v-1}$$

نقلب النسب

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dv} = \frac{v-1}{2v-v^2+1}$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{v-1}{2v-v^2+1}dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{v-1}{2v-v^2+1}dv$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|2v-v^2+1| + \ln|c|$$

$$\ln|2v-v^2+1|^{-\frac{1}{2}} = \ln|xc|$$

$$\ln\sqrt{(2v-v^2+1)}^{-1} = \ln|xc|$$

$$\ln\frac{1}{\sqrt{2v-v^2+1}} = \ln|cx|$$

$$\sqrt{2v-v^2+1} = \frac{1}{cx}$$

$$2v-v^2+1 = \frac{1}{c^2x^2} \Rightarrow \because v = \frac{y}{x}$$

$$2\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{1}{c^2x^2} \Rightarrow$$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

جـ/ حل المعادلة

$$2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$$

الحل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$$

بالقسمة على x^2 للطرفين

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2}$$

$$v=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+v^2}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(1+v^2) \quad \text{---} \quad (1)$$

$$y=vx$$

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \quad \text{---} \quad (2)$$

$$(1)=(2)$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}(1+v^2)$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}(1+v^2)-v \qquad \times 2$$

تقلب الطرفين

$$2x\frac{dv}{dx}=v^2-2v+1$$

نقلب النسب

$$\frac{dx}{2x\,dv}=\frac{1}{v^2-2v+1}$$

$$dx(v^2-2v+1)=2x\,dv$$

$$\frac{dv}{v^2-2v+1}=\frac{1}{2}\frac{dx}{x} \Longrightarrow \frac{dv}{(v-1)^2}=\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$$

برنامج رحلتي في السادس

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$$\int \frac{dv}{(v-1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{-1}{v-1} = \frac{1}{2}\ln|x| + c \qquad \times 2$$

$$\frac{-2}{v-1} = \ln|x| + 2c$$

$$(v-1)(\ln|x| + 2c) = -2$$

$$v-1 = \frac{-2}{\ln|x|+2c}$$

$$v = \frac{-2}{\ln|x|+2c} + 1$$

$$v = 1 - \frac{2}{\ln|x|+2c}$$

$$\because\ v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x} = 1 - \frac{2}{\ln|x|+2c}$$

$$y = x - \frac{2x}{\ln|x|+2c}$$

تمارين (3-5) P_{233}

س (١) حل المعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$$

نلاحظ هذه المعادلة متجانسة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$v = \frac{y}{x}$ نفرض

$$\frac{dy}{dx} = v + e^{v} \quad \text{—— ①}$$

$$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \text{—— ②}$$

$(2) = (1)$

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \cancel{v} + e^{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = e^{v}$$

قلب النسب

$$\frac{dx}{x\,dv} = \frac{1}{e^{v}}$$

$$x\,dv = e^{v}dx$$

$$\frac{dv}{e^{v}} = \frac{dx}{x}$$

$$e^{-v}dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int e^{-v}dx = \int \frac{dx}{x}$$

$$-e^{-v} = \ln|x| + c$$

$$\because v = \frac{y}{x}$$

$$-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + c$$

(2

$$(y^2 - xy)\,dx + x^2\,dy = 0$$

بقسمة المعادلة على x^2

$$\left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{xy}{x^2}\right)dx + \frac{x^2}{x^2}dy = 0$$

$$\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}\right)dx + dy = 0$$

$$dy = -\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)\right)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$v = \frac{y}{x}$ نفرض $\Rightarrow \frac{dy}{dx} + v^2 - v = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v - v^2$

$y = v \cdot x$

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ —— (2)

(2) = (1)

$\frac{dv}{dx} = \cancel{v} - v^2$

$x\frac{dv}{dx} + v^2 = 0$

$v^2 = -x\frac{dv}{dx}$

$x\,dv = v^2\,dx$

$\frac{dv}{v^2} = -\frac{dx}{x}$

$v^{-2}\,dv = -\frac{dx}{x}$

$\int v^{-2}\,dx - \int \frac{dx}{x}$

$-v^{-1} = -\ln|x| + c$

$-\frac{1}{v} = -\ln|x| + c$

$\because v = \frac{y}{x}$

$-\frac{1}{\frac{y}{x}} = -\ln|x| + c \qquad \times(-1)$

$\frac{x}{y} = \ln|x| + c$

$-\ln|3-y| = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

$-\ln|3-y| = \frac{1}{2}(x^2-1)$

$\ln|3-y| = \frac{1}{2}(1-x^2)$

$(3-y) = e^{\frac{1}{2}(1-x^2)}$

$\Rightarrow -y = e^{\frac{1}{2}(1-x^2)} - 3$

$\Rightarrow y = 3 - e^{\frac{1}{2}(1-x^2)}$

(c)

$\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$

$\frac{dy}{(y-1)} = (x+1)\,dx$

$\int \frac{dy}{(y-1)} = \int (x+1)\,dx$

$\ln|y-1| = \frac{(x+1)^2}{2} + C$

$\ln|y-1| = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C$

$y-1 = e^{\frac{1}{2}(x+1)^2 + C}$

(d) $(y^2+4y-1)\,y' = (x^2-2x+3)$

$(y^2+4y-1)\frac{dy}{dx} = (x^2-2x+3)$

$(y^2+4y-1)\,dy = (x^2-2x+3)\,dx$

$\int (y^2+4y-1)\,dy = \int (x^2-2x+3)\,dx$

$\frac{1}{3}y^3 + 2y^2 - y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + C$

(e) $yy' = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$

الحل

$y\frac{dy}{dx} = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$

س (4)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$$

نقسم البسط والمقام على x^2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2y}{x}}$$

نفرض $v = \frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} \text{ ——— (1)}$$

~~نفصل المتغيرات~~

$y = v x$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \text{ ——— (2)}$$

(2) = (1)

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} - v$$

$$\frac{2v^2-1-v^2}{2v} = -x\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{v^2-1}{2v} = -x\frac{dv}{dx}$$

$$\int \frac{2v}{v^2-1}\,dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$\ln|v^2-1| = -\ln|x| + c$

$\ln|v^2-1| + \ln|x| = c$

$\ln|(v^2-1)\,x| = c$

$v = \frac{y}{x}$

$\ln\left|\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)x\right| = c$

$\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)x = e^c$

(5)

$(y^2 - x^2)dx + xy\,dy = 0$

نقسم الحدين على x^2

$\left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}\right)dx + \frac{xy}{x^2}dy = 0$

$\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)dx + \frac{y}{x}dy = 0$

$v = \frac{y}{x}$ نفرض

$(v^2 - 1)dx + v\,dy = 0$

$v\,dy = -(v^2 - 1)dx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-(v^2-1)}{v}$ ——— ①

$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ——— ②

② = ①

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-(v^2-1)}{v}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{-(v^2-1)}{v} - v$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{-(v^2-1) - v^2}{v}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2+1-v^2}{v}$

$\frac{x\,dv}{dx} = \frac{-2v^2+1}{v} \Rightarrow \frac{v\,dv}{-2v^2+1} = \frac{dx}{x}$ $\times -1$

$\frac{v\,dv}{2v^2-1} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{v\,dv}{2v^2-1} = -\int \frac{dx}{x}$

$= \frac{1}{4}\ln|2v^2-1| = -\ln|x| + c$

$v = \frac{y}{x}$

$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2y^2}{x^2} - 1 \right| = -\ln|x| + c$

س (6)

$x^2 y\, dx = (x^3 + y^3)\, dy$

نقسم الاسس على x^3

$\frac{x^2}{x^3} y\, dx = \left(\frac{x^3}{x^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) dy$

$\frac{y}{x} dx = \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3\right) dy$

$v = \frac{y}{x}$ نفرض

$v\, dx = (1 + v^3) dy$

$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{1+v^3}$ —— (1)

$y = vx$

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ —— (2)

س (7)

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - v$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{v - v(1+v^3)}{1+v^3}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{\cancel{v} - \cancel{v} - v^4}{1+v^3}$

$x\, dv\, (1+v^3) = (-v^4)\, dx$

$\frac{dv(1+v^3)}{-v^4} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dv(1+v^3)}{v^4} = -\frac{dx}{x}$

(25)

أمين فرهود الركابي
07804206869

$$\int \frac{(1+v^3)\,dv}{v^4} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v^4} + \int \frac{v^3\,dv}{v^4} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int v^{-4}\,dv + \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^{-3}}{-3} + \ln|v| = -\ln|x| + c$$

$$-\frac{1}{3} v^{-3} + \ln|v| = -\ln|x| + c$$

$$v = \frac{y}{x}$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{y^{-3}}{x^{-3}}\right) + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|x| + c$$

$$-\frac{1}{3\left(\frac{y}{x}\right)^3} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|x| + c$$

$$\frac{-x^3}{y^3} + \ln|y| - \ln|x| = -\ln|x| + c$$

(7) س $\quad x\left(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}\right) = y$

نقسم الطرفين على x

$$\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$$

$$v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} - \tan v = v$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan v + v \quad \text{—} (1)$$

$$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \text{—} (2)$$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \tan v + \cancel{v}$

$x\frac{dv}{dx} = \tan v$

$x\,dv = \tan v\,dx$

$\frac{dv}{\tan v} = \frac{dx}{x}$

$\int \frac{dv}{\tan v} = \frac{dx}{x}$

$\int \frac{dv}{\frac{\sin v}{\cos v}} = \int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{\cos v}{\sin v}\,dv = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|\sin v| = \ln|x| + c$

$v = \frac{y}{x}$

$\ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + c$

$\ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| - \ln|x| = c$

$\ln\left|\frac{\sin\frac{y}{x}}{x}\right| = c$

$\frac{\sin\frac{y}{x}}{x} = e^{c}$

$\sin\frac{y}{x} = x e^{c}$