**SISTEM PERTIDAKSAMAAN KUADRAT DUA VARIABEL**

**SPtKDV**

## A. Pertidaksamaan Kuadrat Dua Variabel

Pertidaksamaan kuadrat dua variabel adalah kalimat terbuka matematika yang memuat dua variabel dengan setidaknya satu variabel berderajat dua dan dihubungkan dengn tanda ketidaksamaan $(>, <, \geq, \leq)$. Bentuk umum dari pertidaksamaan kuadrat dua variabel adalah sebagi berikut:

1. $y < ax^2 + bx + c$
2. $y > ax^2 + bx + c$
3. $y \leq ax^2 + bx + c$
4. $y \geq ax^2 + bx + c$

Keterangan:

$a = koefisien\ dari\ x^2\ ;\ a \neq 0$

$b = koefisien\ dari\ x\ ;\ b \neq 0$

$c = konstanta$

$dengan\ a, b, c\ \in bilangan\ asli$

Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ atau $y = ax^2 + bx + c$ segara grafik adalah sebuah parabola. Jika $a > 0$ maka parabola membuka bagian atasnya, dan apabila $a < 0$ maka parabola membuka bagian bawahnya. Grafik dari fungsi kuadrat tersebut dapat digunakan untuk mencari daerah penyelesain dari pertidaksamaan kuadrat.

Contoh:

Diketahui pertidaksamaan kuadrat $y \geq x^2 - 6x + 5$. Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut.

Solusi:

a. Mengganti tanda " $\geq$ " menjadi tanda ” $=$ ” pada $y \geq x^2 - 6x + 5$, sehingga diperoleh $y = x^2 - 6x + 5$ (fungsi kuadrat).

b. Menggambar grafik dari $y = x^2 - 6x + 5$. Untuk menggambar dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

   i. $y = x^2 - 6x + 5 \rightarrow a = 1 > 0$ maka grafik membuka bagian atasnya.

   ii. Menentukan titik potong grafik terhadap sumbu $x$

   $y = 0$

   $x^2 - 6x + 5 = 0$

   $(x - 5)(x - 1) = 0$

   $x_1 = 5\ ;\ x_2 = 1$

   Diperoleh titik $(1, 0)$ dan $(5, 0)$.

   iii. Menentukan titik potong grafik terhadap sumbu $y$

   $x = 0$

   $y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$

   Diperoleh titik $(0, 5)$.

iv. Menentukan koordinat titik puncak

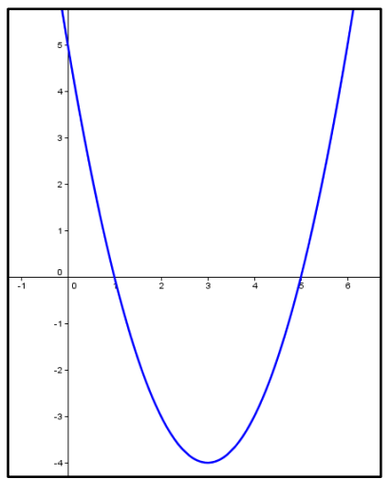
Diketahui: $a = 1\,;\, b = -6\,;\, c = 5$

$$x = -\frac{b}{2b} = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1} = 3$$

$$y = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}{4 \cdot 1} = -\frac{36 - 20}{4} = -4$$

Koordinat titik puncak $(3, -4)$.

Dari empat langkah tersebut, maka diperoleh garfik sebagai berikut:



c. Uji titik untuk mnentukan daerah penyelesaian dari $y \geq x^2 - 6x + 5$.

Diambil sembarang titik missal $(2,0)$ mewakili daerah dalam parabola dan $(0,0)$ mewakili daerah luar parabola. Diuji manakah titik yang memenuhi pertidaksamaan $y \geq x^2 - 6x + 5$.

i. Titik $(2,0)$

$y = 0$

$x = 2 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = 4 - 12 + 5 = -3$

Diperoleh $0 > -3 \rightarrow y > x^2 - 6x + 5$ memenuhi $y \geq x^2 - 6x + 5$

ii. Titik $(0,0)$

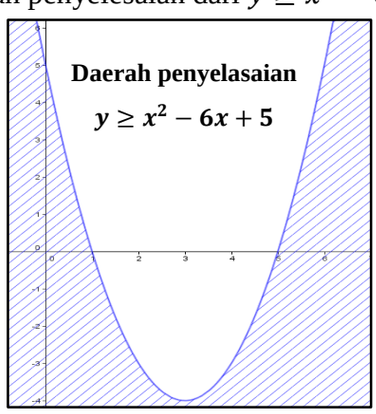
$y = 0$

$x = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 0 - 0 + 5 = 5$

Diperoleh $0 < 5 \rightarrow y < x^2 - 6x + 5$ maka tidak memenuhi $y \geq x^2 - 6x + 5$

Jadi daerah penyelesaian dari $y \geq x^2 - 6x + 5$ adalah daerah dalam parabola.

Daerah penyelesaian dari $y \geq x^2 - 6x + 5$ secara grafik adalah seperti gambar di samping. Daerah yang tidak diarsir adalah daerah penyelesaian dari $y \geq x^2 - 6x + 5$.



Secara umum untuk mecari daerah penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat adalah sebagi beriku:

1. **Langkah 1**: Mengganti tanda ketidasamaan " $<, >, \leq, \geq$ " dengan tanda " $=$ ".
2. **Langkah 2**: Menggambar grafik dari fungsi kuadrat tersebut.
3. **Langkah 3**: Melakukan uji titik untuk mengetahui daerah penyelesain dari pertidaksamaan kuadrat.

## B. Sistem Pertidaksamaan Kuadrat Dua Variabel

Sistem pertidaksamaan kuadrat dua variabel adalah suatu sistem yang terdiri dari dua atau lebih pertidaksamaan dan setiap pertidaksamaan mempunyai dua variabel. Secara umum sistem pertidaksamaan kuadart dua variabel adalah sebagai berikut:

$\begin{cases} y < ax^2 + bx + c \\ y > px^2 + qx + r \end{cases}$ dengan $a, b, c, p, q, dan\ r\ \in R\ ; a \neq 0\ dan\ p \neq 0.$

Selain tanda " $<$ " atau " $>$ " bisa juga diganti dengan tanda " $\leq$ " atau " $\geq$ ".

Contoh:

1. $\begin{cases} y < x^2 + 3x + 2 \\ y > x^2 - 3x + 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y < x^2 - 2 \\ y > x^2 - 3x + 4 \end{cases}$

Untuk mencari daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan kuadrat adalah denagn metode grafik. Dengan menggambar grafik dari kedua pertidaksamaan diperoleh daerah penyelesain yang dibatasi oleh kedua grafik.

Contoh:

Tentukan daerah penyelesaian dari $\begin{cases} y \geq x^2 - 2x - 8 \\ y \leq 4x - x^2 \end{cases}$ !

Solusi:

Langkah pertama yang dilakukan adalah menggambar grafik $y = x^2 - 2x - 8$ kemudian menggambar grafik $y = 4x - x^2$.

1. Langkah 1

   Menggambar grafik $y = x^2 - 2x - 8$

   a. $y = x^2 - 2x - 8 \rightarrow a = 1 > 0$ maka parabola membuka bagian atasnya.

   b. Menemukan titik potong grafik terhadap sumbu $x$

      $y = 0$

      $x^2 - 2x - 8 = 0$

      $(x - 4)(x + 2) = 0$

      $x_1 = 4\ ;\ x_2 = -2$

      Diperoleh titik $(4, 0)$ dan $(-2, 0)$.

   c. Menemukan titik potong grafik terhadap sumbu $y$

      $x = 0$

      $y = x^2 - 2x - 8 = 0 - 8 = -8$

      Diperoleh titik $(0, -8)$

d. Uji titik untuk mnentukan daerah penyelesaian dari $y \geq x^2 - 2x - 8$.

Diambil sembarang titik $(0,0)$ kemudian diuji apakah titik tersebut memenuhi pertidaksamaan $y \geq x^2 - 2x - 8$.

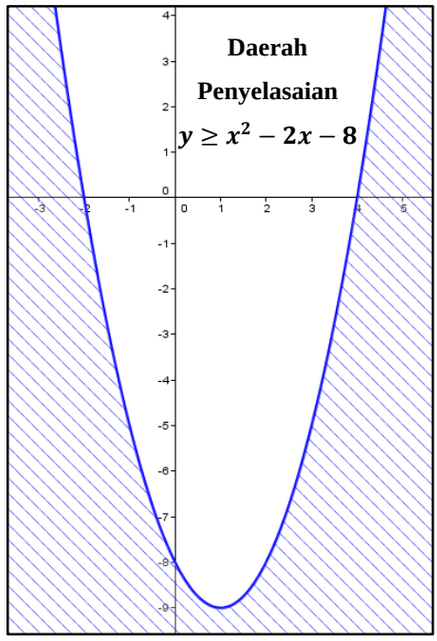
Titik $(0,0)$

$y = 0$

$x = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = 0 - 0 - 8 = -8$

Diperoleh $0 > -8 \rightarrow y > x^2 - 2x - 8$ memenuhi $y \geq x^2 - 2x - 8$

Daerah penyelesaian dari $y \geq x^2 - 2x - 8$ dapat digambarkan pada grafik berikut,




2. Langkah 2

Menggambar grafik $y = 4x - x^2$

a. $y = 4x - x^2 \rightarrow a = -1 > 0$ maka parabola membuka bagian bawahnya.

b. Menemukan titik potong grafik terhadap sumbu $x$

$y = 0$

$4x - x^2 = 0$

$x(4 - x) = 0$

$x_1 = 0\,;\ x_2 = 4$

Diperoleh titik $(0, 0)$ dan $(4, 0)$.

c. Menemukan titik potong grafik terhadap sumbu $y$

$x = 0$

$y = 4x - x^2 = 0 - 0 = 0$

Diperoleh titik $(0,0)$

e. Uji titik untuk mnentukan daerah penyelesaian dari $y \leq 4x - x^2$.

Diambil sembarang titik $(1,0)$ kemudian diuji apakah titik tersebut memenuhi pertidaksamaan $y \leq 4x - x^2$.

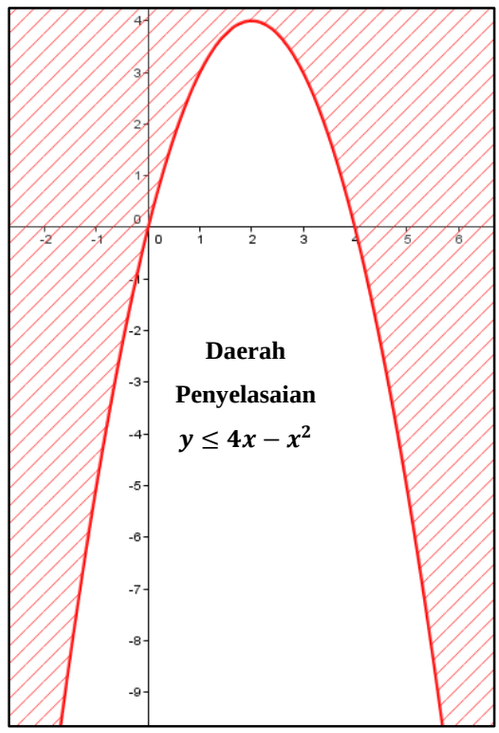
Titik $(1,0)$

$y = 0$

$x = 1 \rightarrow 4x - x^2 = 4 \cdot 1 - 1^2 = 4 - 1 = 3$

Diperoleh $3 > 0 \rightarrow y < 4x - x^2$ memenuhi $y \leq 4x - x^2$

Daerah penyelesaian dari $y \leq 4x - x^2$ dapat digambarkan pada grafik berikut,




3. Langkah 3

   Menentukan titik potong antara kedua grafik.

   $x^2 - 2x - 8 = 4x - x^2$

   $x^2 - 2x - 8 - 4x + x^2 = 0$

   $2x^2 - 6x - 8 = 0$

   $x^2 - 3x - 4 = 0$

   $(x - 4)(x + 1) = 0$

   $x_1 = 4\ ;\ x_2 = -1$

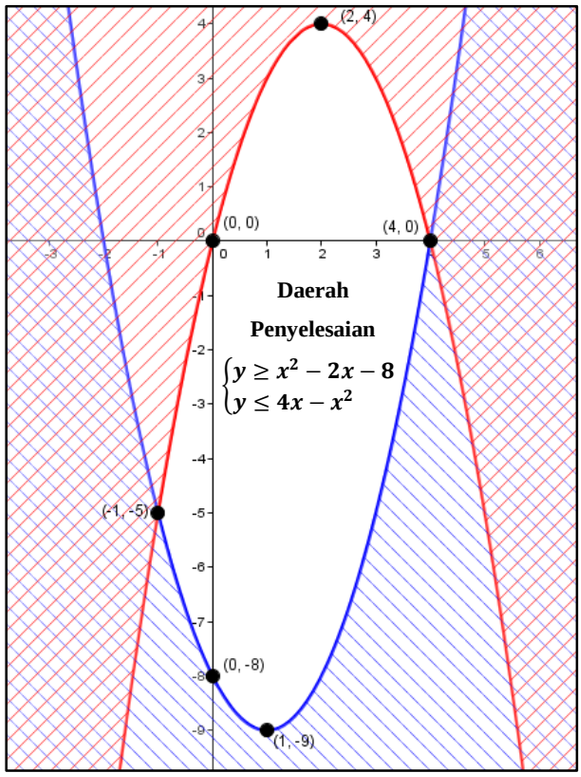
   $x = 4 \rightarrow y = 4x - x^2 = 4 \cdot 4 - 4^2 = 16 - 16 = 0 \rightarrow (4,0)$

   $x = -1 \rightarrow y = 4x - x^2 = 4 \cdot (-1) - (-1)^2 = -4 - 1 = -5 \rightarrow (-1, -5)$

   Jadi titik potong kedua grafik adap pada titik $(4,0)$ dan $(-1, -5)$.

4. Langkah 4

   Menggabungkan kedua grafik pada satu bidang cartesius yang sama. Daerah yang tidak terarsir adalah daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $\begin{cases} y \geq x^2 - 2x - 8 \\ y \leq 4x - x^2 \end{cases}$




## C. Aplikasi Sistem Pertidaksamaan Kuadrat Dua Variabel

Banyak masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan matematika, khususnya yang berkaitan dengan sistem pertidaksamaan kuadrat. Untuk menyelesaikan masalah tersebut ada beberapa tahapan, secara umum tahapan tersebut adalah:

1. Mengubah besaran yang ada dalam masalah sebagai variabel sistem persamaan.
2. Rumuskan sistem pertidaksamaan.
3. Tentukan penyelesaian dari model matematika tersebut.

Untuk lebih memahami berikut adalah masalah yang berkaitan dengan system pertidaksamaan kuadrat dua variabel.

Contoh:

Diketahui S= penawarn, D= permintaan, P= harga keseimbangan, maka tentukan daerah dimana penawaran lebih tinggi dibanding permintaan $(S > D)$ dari fungsi permintaan $S = P^2 + 2P - 3$ dan penawaran $D = 9 - P^2$.

Solusi:

1. Mengubah besaran ke dalam bentuk variabel

   Dimisalkan daerah penyelesaian adlah $y$, maka $S > y > D$

   Dimisalkan $P = x$, maka diperoleh pertidaksamaan

   $y < x^2 + 2x - 3$

   $y > 9 - x^2$

2. Menyususn bentuk system pertidaksamaan

   Dari pertidaksamaan yang tebentuk dapat dibuat system pertidaksamaan sebagai berikut:

$$\begin{cases} y < x^2 + 2x - 3 \\ y > 9 - x^2 \end{cases}$$

3. Mencari daerah penyelesaian dari pertidaksamaan

Langkah pertama yang dilakukan adalah menggambar grafik $y = x^2 + 2x - 3$ kemudian menggambar grafik $y = 9 - x^2$.

1. Langkah 1

Menggambar grafik $y = x^2 + 2x - 3$

a. $y = x^2 + 2x - 3 \rightarrow a = 1 > 0$ maka parabola membuka bagian atasnya.

b. Menemukan titik potong grafik terhadap sumbu $x$

$y = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x + 3)(x - 1) = 0$

$x_1 = -3\ ;\ x_2 = 1$

Diperoleh titik $(-4, 0)$ dan $(1, 0)$.

c. Menemukan titik potong grafik terhadap sumbu $y$

$x = 0$

$y = x^2 + 2x - 3 = 0 - 3 = -3$

Diperoleh titik $(0, -3)$

d. Uji titik untuk menentukan daerah penyelesaian dari $y < x^2 + 2x - 3$.

Diambil sembarang titik $(0,0)$ kemudian diuji apakah titik tersebut memenuhi pertidaksamaan $y < x^2 + 2x - 3$.

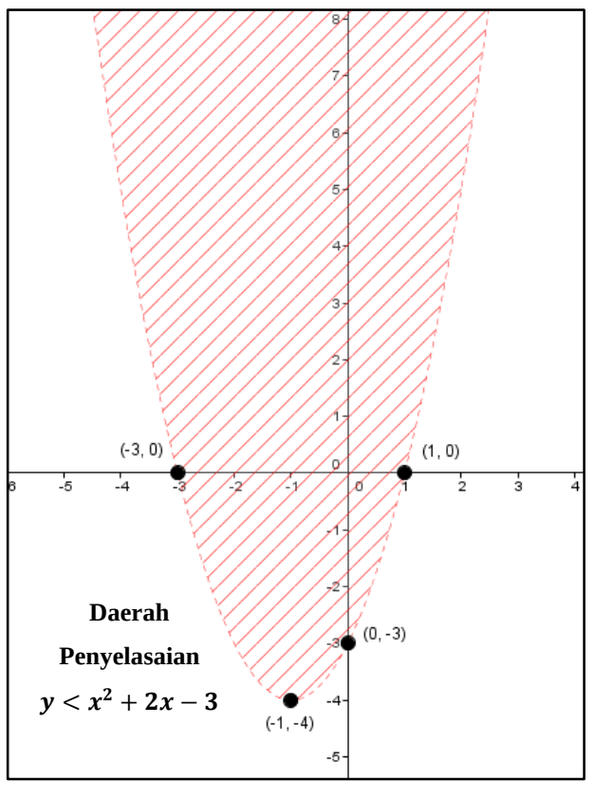
Titik $(0,0)$

$y = 0$

$x = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = 0 + 0 - 3 = -3$

Diperoleh $0 > -3 \rightarrow y > x^2 + 2x - 3$ tidak memenuhi $y < x^2 + 2x - 3$

Daerah penyelesaian dari $y < x^2 + 2x - 3$ dapat digambarkan pada grafik berikut,



2. Langkah 2

   Menggambar grafik $y = 9 - x^2$

   a. $y = 9 - x^2 \rightarrow a = -1 > 0$ maka parabola membuka bagian bawahnya.

   b. Menemukan titik potong grafik terhadap sumbu $x$

      $y = 0$

      $9 - x^2 = 0$

      $(3 + x)(3 - x) = 0$

      $x_1 = -3\ ;\ x_2 = 3$

      Diperoleh titik $(-3, 0)$ dan $(3, 0)$.

   c. Menemukan titik potong grafik terhadap sumbu $y$

      $x = 0$

      $y = 9 - x^2 = 9 - 0 = 9$

      Diperoleh titik $(0,9)$

   d. Uji titik untuk mnentukan daerah penyelesaian dari $y > 9 - x^2$.

      Diambil sembarang titik $(0,0)$ kemudian diuji apakah titik tersebut memenuhi pertidaksamaan $y \leq 9 - x^2$.

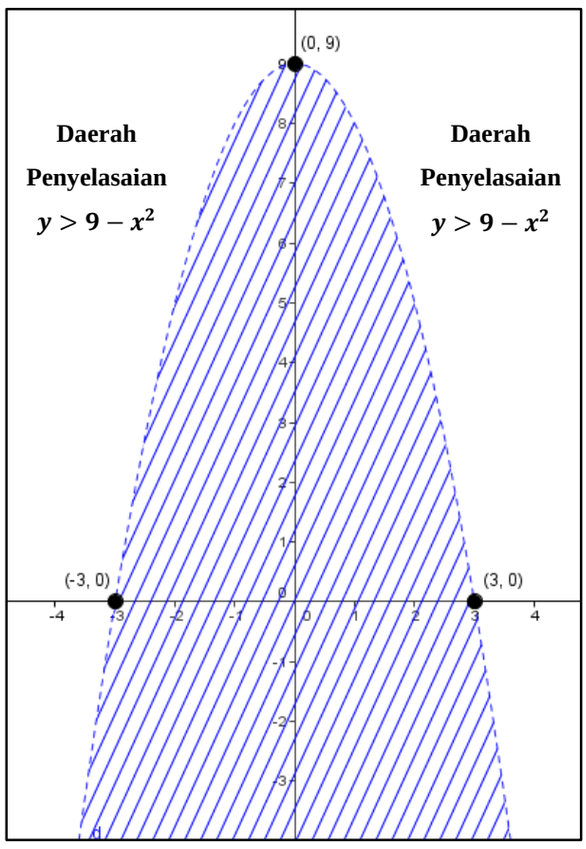
      Titik $(0,0)$

      $y = 0$

      $x = 0 \rightarrow 9 - x^2 = 9 - 0^2 = 9 - 0 = 9$

      Diperoleh $0 < 9 \rightarrow y < 9 - x^2$ tidak memenuhi $y > 9 - x^2$

   Daerah penyelesaian dari $y > 9 - x^2$ dapat digambarkan pada grafik berikut,



3. Langkah 3

   Menentukan titik potong antara kedua grafik.

   $x^2 + 2x - 3 = 9 - x^2$

   $x^2 + 2x - 3 - 9 + x^2 = 0$

   $2x^2 + 2x - 12 = 0$

   $x^2 + x - 6 = 0$

   $(x + 3)(x - 2) = 0$

   $x_1 = -3\ ;\ x_2 = 2$

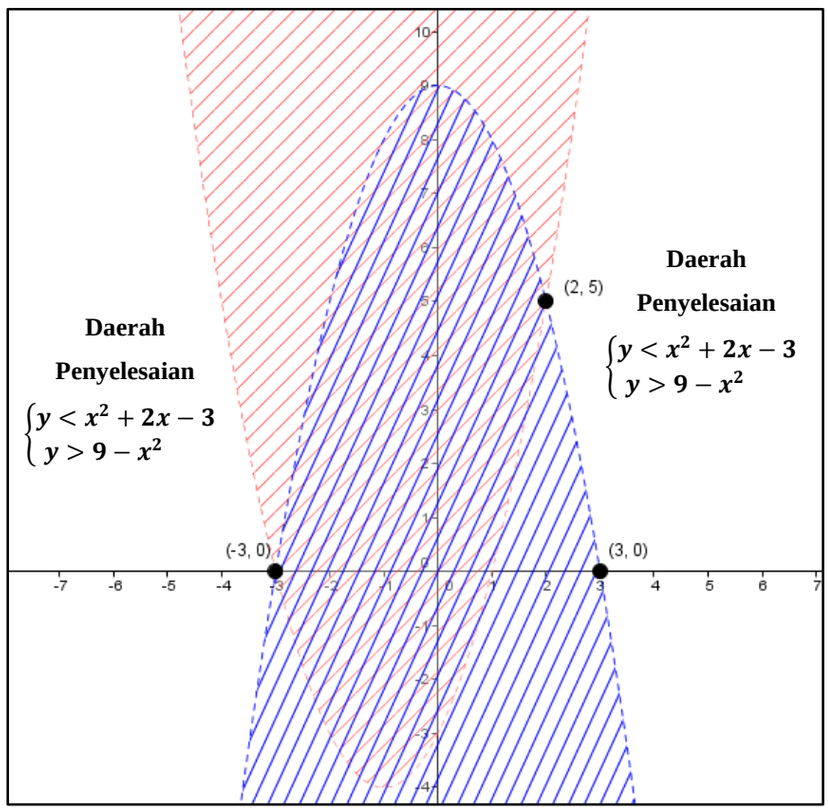
   $x = -3 \rightarrow y = 9 - x^2 = 9 - (-3)^2 = 9 - 9 = 0 \rightarrow (-3,0)$

   $x = 2 \rightarrow y = 9 - x^2 = 9 - 2^2 = 9 - 4 = 5 \rightarrow (2,5)$

   Jadi titik potong kedua grafik adap pada titik $(-3,0)$ dan $(2,5)$.

4. Langkah 4

   Menggabungkan kedua grafik pada satu bidang cartesius yang sama. Daerah yang tidak terarsir adalah daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $\begin{cases} y < x^2 + 2x - 3 \\ y > 9 - x^2 \end{cases}$




Belajar MATEMATIKA
sandigalesh.blogspot.com