2017

برنامج

رحلتي في السادس

ملزمة :

الرياضيات

لل6 الاحياء

للأستاذ

امين فرهود

الرياضيات

السادس العلمي

الفصل الرابع
التكامل

2016 - 2017

حملة شبابنا

من الشباب والى الشباب

برنامج رحلتي في السادس

1 ان هذا البرنامج هو احد مشاريع حملة شبابنا ويهدف الى مساعدة طلبة السادس من خلال توفير ما يحتاجونه ومن دون مقابل ...

2 ان كل الخدمات المقدمة من قبل البرنامج هي مجانية من دون اي مقابل ربحي انما تهدف لغرس التعاون بين الناس لذا يمنع استغلالها لأي اغراض ربحية ...

4 يوجد العديد من الاعمال والانشطة التي يقدمها البرنامج ومنها : التدريس الخصوصي الالكتروني المجاني والنصائح المصورة لأفضل المدرسين وتوفير ملازم خاصة لجميع فروع السادس الأدبي والعلمي بفرعيه ...

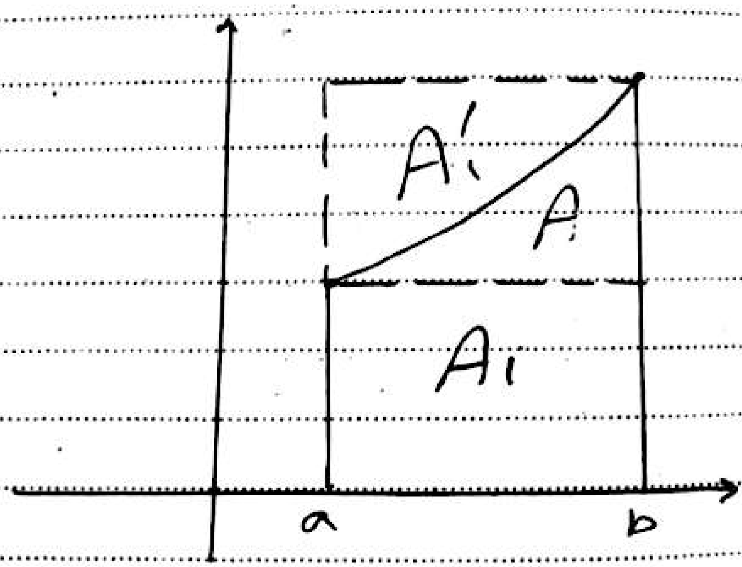
5 لغرض الحصول على جميع الملازم والنصائح والاسئلة وغيرها من خدمات البرنامج ...زورونا على مواقعنا :

برنامج رحلتي في السادس

الفصل الرابع

التكامل

المصطلح	الرمز
سيكما	σ
مجموع	Σ
المجموع الاسفل	$L(\sigma, f)$
المجموع الاعلى	$U(\sigma, f)$
تجزئة الفترة $[x_0, x_1]$	$\sigma = (x_0, x_1, x_2 \ldots)$
المنطقة تحت المنحني	A
اكبر مستطيل داخل المنطقة A	A_1
اكبر مستطيل خارج المنطقة A	A'_1



أستاذ فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

اذا كانت المطلوب هو ايجاد المساحة التقريبية للمنطقة A نتبع ما يلي :

① نجد A_1 من العلاقة $\{A_1=(b-a)m\}$ حيث ان m هي اصغر قيمة للدالة (الارتفاع)

② نجد A_1' من العلاقة $\{A_1'=(b-a)M\}$ حيث M هي اكبر قيمة للدالة (الارتفاع)

③ نجد القيمة التقريبية لمساحة A من العلاقة

$$A=\frac{A_1+A_1'}{2}$$

$(b-a)$ ، تسمى طول القاعدة

ملاحظة : عندما نجد m ، M نجدها من طرفي $[a,b]$ او من النقطة الحرجة ان وجدت .

مثال :
اذا كانت الدالة f مستمرة على $[2,5]$ اوجد القيمة التقريبية للمنطقة A اذا علمت

$$A=\{(x,y),\ 0\leq y\leq f(x)\ ;\ y=\sqrt{x-1}\}$$

الحل / داخل المنطقة

$$b-a=5-2=\boxed{3}$$

$$m=f(2)=\sqrt{2-1}\Rightarrow f(2)=\sqrt{1}\Rightarrow m=\boxed{1}$$

$$A_1=m(b-a)\Rightarrow A_1=1(3)=3\ (\text{unit})^2$$

خارج المنطقة

$$b-a=5-2=\boxed{3}$$

$$M=f(5)=\sqrt{5-1}\Rightarrow M=\sqrt{4}\Rightarrow M=\boxed{2}$$

$$A_1'=M(b-a)\Rightarrow A_1'=2(3)=6\ (\text{unit})^2$$

$$\therefore A=\frac{A_1+A_1'}{2}\Rightarrow A=\frac{3+6}{2}\Rightarrow A=\frac{9}{2}=4.5\ (\text{unit})^2$$

مثال: 1) أوجد القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A حيث

$A = \{(x, y) ; 2 \le x \le 4 , 0 \le y \le 2x^2 - 6\}$

الحل/ $[2, 4]$

نجد داخل المنطقة A

طول القاعدة $b - a = 4 - 2 = 2$

$m = f(2) = 2(2)^2 - 6 \Rightarrow m = 8 - 6 \Rightarrow m = \boxed{2}$

$A_1 = m(b - a) \Rightarrow A_1 = 2(2) = 4 \text{ (unit)}^2$

نجد خارج المنطقة A_1'

$b - a = 4 - 2 = 2$

$M = f(4) = 2(4)^2 - 6 \Rightarrow M = 32 - 6 \Rightarrow M = \boxed{26}$

$A_1' = M(b - a) \Rightarrow A_1' = 26(2) \Rightarrow A_1' = 52 \text{ (unit)}^2$

مساحة A $\therefore A = \frac{A_1 + A_1'}{2} \Rightarrow A = \frac{4 + 52}{2} = \frac{56}{2} = 28 \text{ (unit)}^2$

مثال: واجب

جد قيمة تقريبية لمساحة A حيث

$A = \{(x, y) ; 1 \le x \le 5 \quad 0 \le y \le f(x) ; f(x) = \sqrt{2x}\}$

إيجاد القيمة التقريبية لمساحة منطقة في حالة التجزئة المنتظمة وغير المنتظمة

ملاحظة: إذا كانت التجزئة منتظمة فإن طول الفترة

$\frac{b - a}{n}$

حيث الفترة a, b

n عدد التجزيئات

لأجل حل هكذا أسئلة نتبع ما يأتي: $\longleftarrow$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

① نجد $A_1+A_2+A_3+\dots = m_1(b-a)+m_2(b-a)+m_3(b-a)+\dots$

② نجد $A_1'+A_2'+A_3'+\dots = M_1(b-a)+M_2(b-a)+M_3(b-a)+\dots$

③ نجد $A=\dfrac{(1)\text{الناتج}+(2)\text{الناتج}}{2}$

مثال: أوجد بصورة تقريبية مساحة المنطقة

$A=\{(x,y) : 2\le x\le 5 , f(x)=x^2+1\}$

وذلك باستخدام التجزئة $\sigma=(2,3,5)$

الحل// التجزئة $(2,3,5)$ تجزئة لكن فترات جزئية هي هذه الفترة $[2,3]$, $[3,5]$

وهذه التجزئة ليست منتظمة.

① $[2,3]$

$b-a=3-2=\boxed{1}$

$m_1=f(2)=(2)^2+1 \Rightarrow m_1=4+1 \Rightarrow m_1=\boxed{5}$

$[3,5]$

$b-a=5-3=\boxed{2}$

$m_2=f(3)=(3)^2+1\Rightarrow m_2=9+1\Rightarrow m_2=\boxed{10}$

② $[2,3]$

$b-a=3-2=\boxed{1}$

$M_1=f(2)=(3)^2+1\Rightarrow M_1=9+1\Rightarrow M_1=\boxed{10}$

$[3,5]$

$b-a=5-3=\boxed{2}$

$M_2=f(5)=(5)^2+1=26$

$A_1+A_2=m_1(b-a)+m_2(b-a)$

$=5(1)+10(2)$

$=5+20=25\ (unit)^2$

$A_1'+A_2'=M_1(b-a)+M_2(b-a)$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$A_1' + A_2' = 10 \cdot (1) + 26(2)$
$= 10 + 52 = 62$

$A = \dfrac{(A_1+A_2)+(A_1'+A_2')}{2} = \dfrac{25+62}{2} = \dfrac{87}{2} = 43.5$ (وحدة مساحة)

$\longleftrightarrow$

المثال اعلاه يحل بطريقة اسرع وكما يلي

$\sigma(2,3,5) = [2,3]$ $[3,5]$

$y=4+1=5$ $y=9+1=10$ $y=9+1=10$ $y=25+1$

$m_1=5$ $M_1=10$ $m_2=10$ $M_2=26$

$A_1+A_2 = m_1(3-2) + m_2(5-3)$
$= 5(1) + 10(2)$
$= 5+20$
$= 25 \text{ units}^2$

$A_1'+A_2' = M_1(3-2) + M_2(5-3)$
$= 10(3-2) + 26(2)$
$= 10+52$
$= 62$

$\therefore A = \dfrac{(A_1+A_2)+(A_1'+A_2')}{2} = \dfrac{25+62}{2} = \dfrac{87}{2} = 43.5$

$\longleftrightarrow$

مثال ⭕: جد القيمة التقريبية لمساحة المنطقة

$A = \{(x,y) ; 2 \le x \le 5 ; y = x^2+1\}$

باستخدام التجزئة $\sigma = (2,3,4,5)$

الحل / هنا التجزئة منتظمة لذلك طول الفترة $= \dfrac{5-2}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

$[2,5] = [2,3]$ $[3,4]$ $[4,5]$

$y=4+1$ $y=9+1$ $y=9+1$ $y=16+1$ $y=16+1$ $y=25$

$m_1=5$ $M_1=10$ $m_2=10$ $M_2=17$ $m_3=17$ $M_3=$

$A_1+A_2+A_3 = m_1(3-2)+m_2(4-3)+m_3(5-4)$
$= 5(1) + 10(1) + 17(1)$
$= 5+10+17 = 32 \ (units)^2$

$A_1'+A_2'+A_3' = M_1(3-2)+M_2(4-3)+M_3(5-4)$
$= 10(1) + 17(1) + 26(1)$
$= 10+17+26 = 53 \ (unit)^2$

$A = \frac{(A_1+A_2+A_3)+(A_1'+A_2'+A_3')}{2}$

$A = \frac{32+53}{2} = \frac{85}{2} = 42.5 \ unit^2$

مثال : واجب
جد القيمة التقريبية لمساحة المنطقة

$\{ f(x) = 2x-3 \}$
باستخدام كل من التجزئات

$\sigma_1 = (4,5,7)$, $\sigma_2 = (4,5,6,7)$

نلاحظ σ_1 غير منتظمة لان $\frac{7-4}{2} \neq 1$

σ_2 منتظمة لان $\frac{7-4}{3} = 1$

يعني σ_1 تجزئ الى فترتين
σ_2 تجزئ الى ثلاث فترات

$L(\sigma,f)$ سفلى
$U(\sigma,f)$ عليا

المجاميع العليا والمجاميع السفلى

لايجاد المجاميع العليا والمجاميع السفلى نكون الجدول الاتي

القترة $[a,b]$	طول الفترة $h=b-a$	m	M	$\sum hm$ $L(\sigma,f)$	$\sum hM$ $U(\sigma,f)$
الفترات	$\ldots$ ﹣ ا ﹣ ﹍	نعوض الحد الادنى في الدالة المعطاة لكل فترة	نعوض الحد الاعلى في الدالة لكل فترة	نضرب h في m لكل فترة ثم نجمع الناتج	نضرب h في M لكل فترة ثم نجمع الناتج

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

ملاحظة: قبل انشاء الجدول يجب التأكد من وجود او عدم وجود نقطة حرجة وذلك بالطريقة التالية نشتق الدالة ثم نجعل $f'(x)=0$ ثم نجد قيمة x ونلاحظ انتمائها الى فترة محددة. فاذا ظهرت ان x تنتمي الى اي فترة فلا معنى لوجود الحرجة او اذا كانت تنتمي الى فترتين متعاقبتين فلا معنى لوجودها ودائماً نبحث عن التأكيد ولتنقص (غير مطلوب في الاجابة بالوزاري) لكن من امكن التعامل مع من نكون قيمة اكبر او قيمة اصغر.
وكما في الامثلة التالية:

———×———×———

مثال (1) P_{166} جد $L(\sigma, f)$ ، $U(\sigma, f)$

اذا كانت $f:[-2,1] \rightarrow R$ ، $f(x)=3-x$

(a) $\sigma=(-2,0,1)$

الحل/

$\sigma=(-2,0,1)=[-2,0]$, $[0,1]$

الحرجة $f'(x)=-1$

لا يمكن $f(x)=0$

لا توجد نقطة حرجة

$-2 \quad 0 \quad 1$

بما ان الدالة مستمرة لكل R

الان نكون الجدول.

الفترة الجزئية $[b-a]$	طول الفترة $h=b-a$	m	M	$\sum hm$	$\sum hM$
$[-2,0]$	$0-(-2)$ 2	$m_1=3-0$ $=3$	$M_1=3+2$ $=5$	6	10
$[0,1]$	1 $1-0=1$	$m_2=3-1$ $=2$	$M_2=3-0$ $=3$	2	3
				$L(\sigma,f)$ 8	$U(\sigma,f)$ 13

$\therefore L(\sigma,f)=8$, $U(\sigma,f)=13$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

ملاحظة $U(\sigma,f) > L(\sigma,f)$

س (2) $f(x)=4x-x^2$ ، $f[0,4] \to R$ حيث $\sigma=(0,1,2,3,4)$

الحل/ $\sigma=(0,1,2,3,4)=[0,1],[1,2],[2,3],[3,4]$

$f(x)=4x-x^2 \Rightarrow f'(x)=4-2x \Rightarrow 4-2x=0$

$4=2x \to x=2$

لوجود نقطة حرجة $x \in [1,2] , [2,3]$

الفترات الجزئية $[a,b]$	طول الفترة $h=b-a$	m	M	hm	hM
$[0,1]$	1	0	3	0	3
$[1,2]$	1	3	4	3	4
$[2,3]$	1	3	4	3	4
$[3,4]$	1	0	3	0	3
				$\sum hm=6$	$\sum hM=14$

$\therefore L(\sigma,f)=6$

$U(\sigma,f)=14$

س (3) $f(x)=3x^2+2x$ ، $f[1,4] \to R$

ⓐ $\sigma=(1,2,4)$

ⓑ تجزئة منتظمة

الحل/ $\sigma=(1,2,4)=[1,2]\ [2,4]$

$f'(x)=6x+2 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 6x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \notin [1,4]$

أمين ابراهيم الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

فارغ

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$[a,b]$	$b-a=h$	m	M	hm	hM
$[1,2]$	1	5	16	5	16
$[2,4]$	2	16	56	32	112
				$\Sigma hm = 37$	$\Sigma hM = 128$

$L(\sigma, f) = 37$

$U(\sigma, f) = 128$

(b) ثلاث تجزيئات منتظمة

$\frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$\sigma(1,2,4) = [1,2]\ [2,3]\ ,[3,4]$

نفس ايجاد العمل يكون بثلاث فترات جزئية

القترة الجزئية $[a,b]$	طول الفترة $b-a$	m	M	hm	hM
$[1,2]$	1	5	16	5	16
$[2,3]$	1	16	33	16	33
$[3,4]$	1	33	56	33	56
				$\Sigma hm = 54$	$\Sigma hM = 105$

$L(\sigma, f) = 54$

$U(\sigma, f) = 105$

أمين فرهود الركابي
07804206869

القيمة التقريبية لتكامل دالة

تعرف بالعلاقة

$$\int_a^b f = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2}$$

مثال ١: $f:[1,3] \to R \quad f(x) = x^2$

اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 x^2 \, dx$

باستخدام تجزئة الفترة الى جزئين.

الحل $\sigma = (1, 2, 3) = [1,2] \; , \; [2,3]$

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$f'(x) = 0$ نجعل

$2x = 0$

$x = 0 \notin [1,3]$ لا توجد نقط حرجة

الفترة الجزئية $[a,b]$	طول الفترة $b-a$	m	M	hm	hM
$[1,2]$	1	1	4	1	4
$[2,3]$	1	4	9	4	9
				5	13

$L(\sigma, f) = 5 \qquad U(\sigma, f) = 13$

$$\int_1^3 x^2 \, dx = \frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

أمين فرهود الر...
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

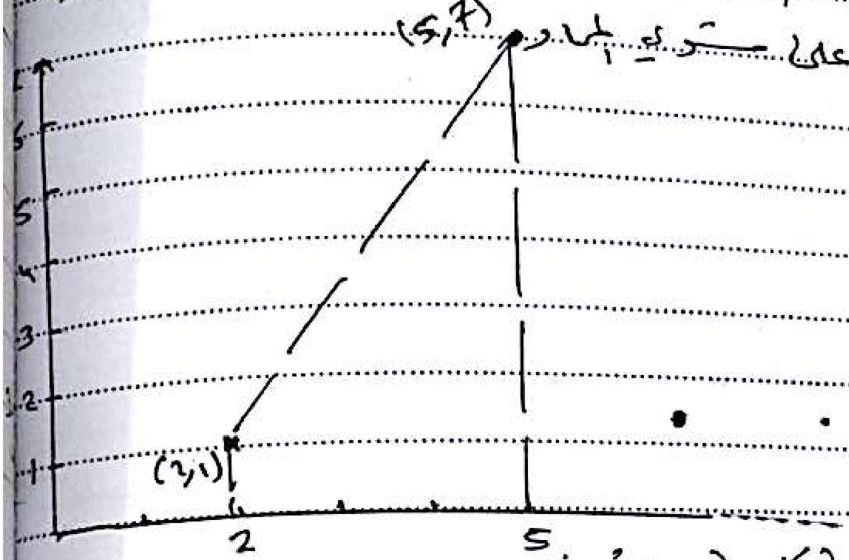
مثال: لتكن $f(x)=2x-3$ حيث $f:[2,5]\to R$ جد $\int_2^5 f(x)$ وتحقق من ذلك هندسياً

ح/
نكمل كما ورد في المثال السابق
اما هندسياً سيكون كما يلي:

$x=2 \Rightarrow f(2)=4-3=1 \Rightarrow$ ~~m=~~ $\Rightarrow (2,1) \Rightarrow m=1$

$x=5 \Rightarrow f(5)=10-3 \Rightarrow =7 \Rightarrow (5,7) \Rightarrow m=7$

نرسم النقطتان على المستوي الاحداثي



من الرسم حصلنا على شكل شبه منحرف

المساحة $= \frac{1}{2}$ (الارتفاع)(مجموع طولي الضلعين المتوازيين)

$= \frac{1}{2}(1+7)(5-2) = \frac{1}{2}(8)(3) = 4\times 3 = 12$ unit

نلاحظ دائماً هنا ناتج طريقة الجدول يساوي ناتج الطريقة الهندسية.

مثال: ت(1) ص 171 (4-2)
اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x}dx$
باستخدام التجزئة $\sigma(1,2,3)$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

الحل /

$\sigma = (1,2,3) = [1,2]\ ,\ [2,3]$

الفترة الجزئية $[a,b]$	طول الفترة $b-a$	m	M	hm	hM
$[1,2]$	1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	3
$[2,3]$	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
				$\sum hm = \frac{5}{2}$	$\sum hM = \frac{9}{2}$

$f(x) = 3x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-2}$

$f'(x) = -\frac{3}{x^2}$

$f'(x) = 0$

$\frac{-3}{x^2} = 0 \Rightarrow -3 = 0$ تهمل

لا توجد حرجة

$$\int_1^3 \frac{3}{x} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{9}{2}}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

ت (2) $f : [1,4] \to R \qquad f(x) = 3x - 3$

جد قيمة $\int_1^4 f(x)\,dx$ باستخدام تجزئة $\sigma = (1,2,3,4)$

ثم تحقق هندسياً :

الحل /

$\sigma(1,2,3,4) = [1,2]\ [2,3]\ [3,4]$

$f'(x) = 3 \Rightarrow 3 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1,4]$

لا توجد نقطة حرجة

الفترة الجزئية $[a,b]$	طول الفترة $b-a$	m	M	hm	hM
$[1,2]$	1	0	3	0	3
$[2,3]$	1	3	6	3	6
$[3,4]$	1	6	9	6	9
				$\sum hm = 9$ $L(\sigma,f)$	$\sum hM$ 18 $U(\sigma,f)$

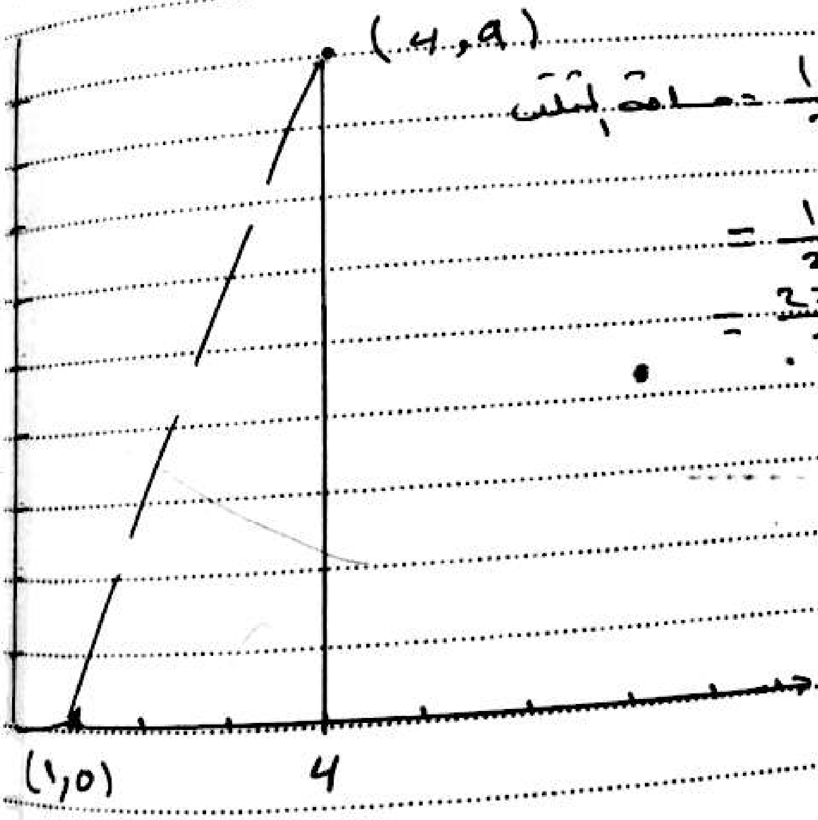
$$\int_1^4 f(x) = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}$$

$$= \frac{9+18}{2} = \frac{27}{2} = 13.5 \text{ unit}$$

الآن نتحقق هندسياً .

$f(1) = 3(1) - 3 = 0 \Longrightarrow m_1 = 0 \Longrightarrow (1,0)$

$f(4) = 12 - 3 = 9 \Longrightarrow (4,9)$



مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$ (القاعدة)(الارتفاع)

$= \frac{1}{2}(4-1)(9)$

$= \frac{27}{2} = 13.5$ unit

ت (3) اوجد قيمة التكامل $\int_2^4 (3x^2-3)\,dx$

تمهيدي ١٢ بالتجزئة $\sigma=(2,3,4)$

الحل/

$\sigma=(2,3,4)=[2,3]\quad[3,4]$

$f(x)=3x^2-3$

$f'(x)=6x-0$

$f'(x)=0 \Rightarrow 6x-0=0 \Rightarrow x=0 \notin [2,3]$

لا توجد نقط حرجة

الفترات الجزئية $[a,b]$	طول الفترة $b-a$	m	M	hm	hM
$[2,3]$	1	9	24	9	24
$[3,4]$	1	24	45	24	45
				$\sum hm$	$\sum hM$
				33	69
				$L(\sigma,f)$	$U(\sigma,f)$

$$\int_2^4 f(x) = \frac{33+69}{2} = \frac{102}{2} = 51$$

ت (4) ص ١٧١

جد قيمة التكامل $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$ حيث $f(x)=-4$

$f'(x)=0$

$[-3,2]=[-3,0]\,[0,2]$ لا تمتلك نقطة حرجة

اكمل في ص 16

القرآت الجزئية $[a,b]$	طول الفترة $b-a$	m	M	hm	hM
$[-3,0]$	3	-4	-4	-12 (12)	-12 (12)
$[0,2]$	2	-4	-4	-8 (8)	-8 (8)
				Σhm	ΣhM
				20	20
				$L(\sigma,f)$	$U(\sigma,f)$

$$\int_{-3}^{2} f(x) = \ldots$$

$$\int_{-3}^{2} -4 = \frac{20+20}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

ت (5) اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_{1}^{5} x^3\, dx$ باستخدام اربعة تجزيئات منتظمة

$[1,5] = \sigma = (1,2,3,4,5) = [1,2], [2,3], [3,4], [4,5]$

$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x \notin [1,5]$

لا تمتلك نقطة حرجة

القرآت الجزئية $[a,b]$	طول الفترة $b-a$	m	M	hm	hM
$[1,2]$	1	1	8	1	8
$[2,3]$	1	8	27	8	27
$[3,4]$	1	27	64	27	64
$[4,5]$	1	64	125	64	125
				Σhm	ΣhM
				100	224

$$\int_{1}^{5} x^3 = \frac{224+100}{2} = \frac{324}{2} = 162$$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

التكامل الغير محدد

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

حيث ان عملية التكامل هي عكس عملية الاشتقاق

وان بعد كل عملية تكامل نضيف ثابت التكامل (C).

وهناك مجموعة من القواعد للتكامل هي

① $\int dx = x + C$

الثابت يخرج خارج التكامل

② $\int a\,dx = a\int dx = ax + C$

حيث a عدد ثابت

③ $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Ex $\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} + C$

Ex $\int 3x^5\,dx = 3\int x^5\,dx = 3\,\dfrac{x^6}{6} + C$

④ $\int [f(x) \mp g(x)] = \int f(x) \mp \int g(x)$

لأن التكامل يوزع على الجمع والطرح

Ex $\int (x^2 + 3x^5 + 2x + 4)\,dx$

$= \int x^2\,dx + \int 3x^5\,dx + \int 2x\,dx + \int 4\,dx$

$= \left[\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^6}{6} + \dfrac{2x^2}{2} + 4x\right] + C$

$= \left[\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^6}{2} + x^2 + 4x\right] + C$

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx \neq \int f(x) \cdot \int g(x)$$

يعني ان التكامل لا يتوزع على الدالتين المضروبتين
[على شكل متوسطين] وانما تتم العمليه عملية الضرب اولاً ثم نكامل.

Ex $\int (5x+1)(3x^2+9)\, dx$ ..

$$\int (15x^3 + 45x + 3x^2 + 9)\, dx$$

$$= \frac{15x^4}{4} + \frac{45x^2}{2} + \frac{3x^3}{3} + 9x + C$$

⑥ $$\int \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] dx \neq \frac{\int f(x)}{\int g(x)}\, dx$$

يعني ان التكامل لا يتوزع على القسمة انما يتم
ما تخص القسمة بالتحليل والاختصار.

Ex $$\int \frac{x^2-4}{(x-2)}\, dx$$

$$= \int \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}\, dx$$

$$= \int (x+2)\, dx = \int x\, dx + \int 2\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

⑦ $$\int (f(x))^n (f'(x))\, dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1}$$

يعني مشتقة قوس مرفوع لأس حقيقي يجب ان
نتأكد هل ان مشتقة داخل القوس موجودة من عدمها
باضافة (1) الى الاس واذا غير موجودة علينا توفيرها

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

Ex
$$\int (x^2+2)^5 \, 2x \, dx$$

نلاحظ ان مشتقة داخل القوس هي (2x) وهي موجودة ضمن التكامل اذن نضيف للاس (1) ونقسم على الناتج

$$= \frac{(x^2+2)^6}{6} + C$$

Ex
$$\int (3x^2+1)^4 \, x \, dx$$

نلاحظ ان مشتقة داخل القوس هي $6x$ والـ 6 غير موجودة ضمن التكامل فعليك ضرب الداخل (6) واضرب $\frac{1}{6}$

$$= \frac{1}{6} \int (3x^2+1)^4 \, 6x \, dx$$

$$= \frac{1}{6} \frac{(3x^2+1)^5}{5} + C$$

Ex
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$$

علينا التخلص من الجذر ثم رفعه الى البسط

$$\int x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \, 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

ملاحظة: بعض الاحيان ان مشتقة داخل القوس الى طريقة اكمال المربع.
لا يمكن توزيعها لذلك سوف نلجأ
ثم اكمال التكامل

$$\int \sqrt{(x^2+6x+9)}\, dx$$

$$\int (x^2+6x+9)^{\frac{1}{2}}\, dx \quad \because$$

فان مشتقة داخل القوس هي $(2x+6)$
وهذا لا يمكن ان نوزعها

$$\int \left((x+3)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int (x+3)\, dx$$

$$= \int x\, dx + 3\int dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + C \quad \because$$

ملاحظة:

في بعض الاحيان تكامل قوسان مشتقتهما نفس الاس، نأخذ
عامل مشترك لاحدهما ثم نضرب ذلك للقوسين ونكمل

$$\int (x+1)^3 (2x+2)\, dx$$

$$= \int (x+1)^3 [2(x+1)]\, dx \quad \because$$

$$= 2\int (x+1)^3 (x+1)\, dx$$

$$= 2\int (x+1)^4\, dx$$

$$= 2\left(\frac{(x+1)^5}{5}\right) + C$$

حل تمارين (4-4) ص 187

1- $\int \frac{(2x^2-3)^2}{x^2}\,dx$

$= \int \left(\frac{4x^4-12x^2+9}{x^2}\right) dx$

$= \int \frac{4x^4}{x^2}\,dx - \int \frac{12x^2}{x^2}\,dx + \int \frac{9}{x^2}\,dx$

$= \int 4x^4\,dx - \int 12\,dx + \int 9x^{-2}\,dx$

$= \frac{4}{5}x^5 - 12x - 9x^{-1} + C$

(2) $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\,dx = \int \frac{(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}})^7}{\sqrt{7}\,x^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}})^7 x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{7}}\,dx$

$= \frac{1}{\sqrt{7}} \int x^{-\frac{1}{2}}(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}})^7\,dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{-2}{\sqrt{5}} \int x^{-\frac{1}{2}}(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}})^7\,dx$

$= \frac{-2}{\sqrt{35}} \int \frac{-\sqrt{5}}{2} x^{-\frac{1}{2}} (3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}})^7\,dx$

$= \frac{-2}{\sqrt{35}} \frac{(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}})^8}{8} + C = \frac{-1}{4\sqrt{35}}(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}})^8 + C$

(5) $\int \frac{x}{(3x^2+5)^4}\,dx = \int (3x^2+5)^{-4}\,x\,dx$

$= \frac{1}{6}\int (3x^2+5)^{-4}\,6x\,dx$

$= \frac{1}{6}\left[\frac{(3x^2+5)^{-3}}{-3}\right] + C$

$= -\frac{(3x^2+5)^{-3}}{18} + C$

$$\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\,dx = \int \sqrt[3]{(x+5)^2}\,dx$$

$$\int (x+5)^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{(x+5)^{5/3}}{5/3} + c = \frac{3}{5}\,\frac{(x+5)^{5/3}}{1} + c$$

$$\int (3x^2+1)^2\,dx = \int (9x^4+6x^2+1)\,dx$$

$$= 9\int x^4\,dx + 6\int x^2\,dx + \int dx$$

$$= 9\left(\frac{x^5}{5}\right) + 6\left(\frac{x^3}{3}\right) + x + c$$

$$= \frac{9}{5}x^5 + 2x^3 + x + c$$

(10) $$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}}{(x)^{3/4}}\,dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}}\,\sqrt{1-\sqrt{x}}}{(x^{3/4}}\,dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{(x)^{1/2}}\,\sqrt{1-(x)^{1/2}}}{(x)^{3/4}}\,dx$$

$$= \int \frac{\left((x)^{1/2}\right)^{1/2}\left(1-(x)^{1/2}\right)^{1/2}}{x^{3/4}}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{4}}\left(1-(x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{3/4}}\,dx$$

$$= \int (x^{\frac{1}{4}})(x)^{-\frac{3}{4}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int x^{-\frac{2}{4}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= -\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$$= \frac{-(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \Rightarrow \frac{-2}{3}\sqrt{(1-\sqrt{x})^3} + c$$

تكاملات الدوال المثلثية

① $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ قاعدة مهمة جداً

② $\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$ مشتقة الزاوية

Ex $\int \sin 8x \, dx = -\frac{1}{8}\cos 8x + c$

Ex $\int \sin(3x+1) \, dx = \frac{-1}{3}\cos(3x+1) + c$

Ex $\int \sin(2-5x) \, dx = \frac{1}{5}\cos(2-5x) + c$

Ex $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \sin x^{\frac{1}{2}} \, dx = -2\cos x^{\frac{1}{2}} + c$

$= -2\cos\sqrt{x} + c$

هنا مشتقة الزاوية تهمل عند التكامل فقط نأخذ مقلوب العدد

③ $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

④ $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

Ex $\int \cos 5x \, dx = \frac{1}{5}\sin 5x + c$

Ex $\int \cos(3x+1) \, dx = \frac{1}{3}\sin(3x+1) + c$

Ex $\int x\cos(2x^2+7) \, dx = \frac{1}{4}\sin(2x^2+7) + c$

... فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

5) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

$\int \sec^2 ax \, dx = \frac{1}{a} \tan ax + c$

$\int \sec^2 2x \, dx = \frac{1}{2} \tan 2x + c$

$\int x^2 \sec^2 (2x^3) \, dx = \frac{1}{6} \tan 2x^3 + c$

$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

$\int \csc^2 ax \, dx = \frac{-1}{a} \cot ax + c$

$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

$\int \sec ax \tan ax \, dx = \frac{1}{a} \sec ax + c$

11) $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$

12) $\int \csc ax \cot ax \, dx = -\frac{1}{a} \csc ax + c$

تكاملات مربعات الدوال المثلثية

1) $\int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$

2) $\int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$

حيث

$2ax$ الزاوية مضروبة $\times (2)$

$4a$ مشتقة الزاوية $\times (4)$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

③ $\int \sec^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tan ax + c$

Ex $\int \sec^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\tan 2x + c$

④ $\int \csc^2 ax = -\frac{1}{a}\cot ax + c$

⑤ $\int \tan^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tan ax - x + c$

⑥ $\int \cot^2 ax = -\frac{1}{a}\cot ax - x + c$

ملاحظة:
تكامل ضرب دالتين sin ، cos
سوف نكتب / احداهما اصلية والاخرى مشتقة ونطبق
بالمطر (القاعدة السابقة)
اذا كانت احدى الدالتين بأس صحيح والاخرى بدون أس
سوف نكتب / الدالة ذو الاس اصلية والتي هي مشتقة ونطبق
القاعدة

Ex $\int \overset{\text{اصلية}}{\sin x}\,\overset{\text{مشتقة}}{\cos x}\,dx$

$= \frac{\sin^2 x}{2} + c$

او بالعكس

$\int \sin x \cos x\,dx$

$= -\frac{\cos^2 x}{2} + c$

Ex $\int \underbrace{\cos^4 x}_{\text{اصلية}}\,\underbrace{\sin x\,dx}_{\text{مشتقة}} = \frac{-\cos^5 x}{5} + c$

ملاحظة:

اذا كان الاس لـ cos أو sin فردي فيمكنم الاستفادة من

* $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
* $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Ex: $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x\, dx$

$= \int \sin x(1 - \cos^2 x)\, dx$

$\int \sin x - \sin x \cos^2 x\, dx$

$\int \sin x\, dx - \int \sin x \cos^2 x\, dx = -\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C$

Ex: $\int \cos^3 2x\, dx$

ملاحظة:

اذا كان الاس زوجي فيمكنم الاستفادة من

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Ex: $\int \sin^4 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2\, dx$

$= \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right]^2 dx$

$= \int \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$

$= \frac{1}{4}\left[\int dx - \int 2\cos 2x\, dx + \int \cos^2 2x\, dx\right.$

$= \frac{1}{4}\left[x - 2 \times \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8}\right. + C$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

Ex:
$$\int \sin^4 3x\,dx = \int (\sin^2 3x)^2\,dx$$
$$= \int \left[\tfrac{1}{2}(1-\cos 6x)\right]^2 dx = \int \tfrac{1}{4}(1-2\cos 6x+\cos^2 6x)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\left[\int dx - \int 2\cos 6x\,dx + \int \cos^2 6x\,dx\right]$$
$$= \tfrac{1}{4}\left[x - 2\times\tfrac{1}{6}\sin 6x + \tfrac{x}{2} + \tfrac{\sin 12x}{24}\right] + C$$

ملاحظة:
اذا كان الاقترانان (sin , cos) لهما اسس فردية
نأخذ الأس الأقل واذا كانا متساويان فيترك للطالب
الخيار ايهما يأخذ (يقصد به عملية الفتح حسب ملاحظة 26)

Ex:
$$\int \sin^3 x \cos^7 x\,dx = \int \sin^2 x \sin x \cos^7 x\,dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)\sin x \cos^7 x\,dx = \int [\sin x \cos^7 x - \sin x \cos^9 x]\,dx$$
$$= \int \underbrace{\sin x}_{\text{مشتقة}} \underbrace{\cos^7 x}_{\text{الاصلية}}\,dx - \int \underbrace{\sin x}_{\text{مشتقة}} \underbrace{\cos^9 x}_{\text{اصلية}}\,dx = \frac{\cos^8 x}{8} + \frac{\cos^{10} x}{10}$$

Ex: $\int \sin^3 x \cos^3 x\,dx$

ملاحظة:
اذا كانت الاسس احدهما فردي والاخر زوجي فنختار الفردي
للفتح ونكمل الحل

$$\int \sin^3 x \cos^8 x\,dx$$
$$= \int [\sin^2 x \sin x \cos^8 x]\,dx$$

ونكمل الحل كما سبق

ملاحظة: اذا كانت الاسس زوجية متساوية فان

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

أمين فرهود الركابي
07804206869

ملاحظة:
اذا كان الاسان زوجيان مختلفان متساويين للاس الاكبر المعوض
السابقة

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

Ex: $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \int (\sin x \cos x)^2\,dx$

$= \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right) + C$

Ex: $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x\,dx$

$= \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right] dx$

$= \int \frac{\sin^2 2x}{4}\left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right] dx = \frac{1}{8}\int \left[\sin^2 2x + \sin^2 2x \cos 2x\right] dx$

$= \int \sin^2 2x\,dx + \int \sin^2 2x \cos 2x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 2x}{3} + C$

ملاحظة: اذا اختلفت الزوايا (الضعف)
اذا كانت الضعف عند دالة sin نفعل فتح الضعف بالاعتماد
حسب قانون ضعف الزاوية

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

Ex: $\int \sin 10x \cos^3 5x\,dx = \int 2\sin 5x \cos 5x \cos^3 5x\,dx$

$= \int \underbrace{2\sin 5x}_{\text{مشتقة}}\ \underbrace{\cos^4 5x}_{\text{اصلية}}\,dx$

$= \frac{-2}{25}\cos^5 5x + C$

Scanned by CamScanner

ملاحظة:

اذا كان المفقود عند دالة cos فنفتح داله cos :

حسب ما مضروب بها فان كان المضروب بها هو sin x واسه فردي نفتح cos

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

واذا كان المضروب بها هو cos واسه فردي نفتح

يعني نفتح عكس المضروب

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

اما اذا كان المضروب بـ cos2x له اس زوجي فلا نفتح cos بل المضروب يحول الى ضعف زاويا

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

حل تمارين (4-4) ص 187

(4) $\int \csc^2 x \cos x \, dx$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} \cos x \, dx = \int \left[\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}\right] dx$$

$$= \int \cot x \csc x \, dx = -\csc x + C$$

(7) $\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x \sin^2 x \, dx$

$$= \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx = \int \sin x \, dx - \int \sin x \cos^2 x$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

أمين فرهود الركابي
07802006869

$\int \frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\, dx$

1) $\int \frac{\cos(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} dx = \int \cos(1-x)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx$

$= -2\int \cos(1-x)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}} dx$

$= -2\sin(1-x)^{\frac{1}{2}} + C$

11) $\int (1+\cos 3x)^2 dx$

$= \int (1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x) dx$

$= \int dx + 2\int \cos 3x\, dx + \int \cos^2 3x\, dx$

$= \cancel{x + \frac{x}{2} +}$

$= x + 2\left(\frac{1}{3}\right)\sin 3x + \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 6x}{12}\right) + C$

$= x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{x}{2} + \frac{\sin 6x}{12} + C$

2) $\int \sec^2 4x\, dx = \frac{1}{4}\tan 4x + C$

3) $\int \csc^2 2x\, dx = \frac{-1}{2}\cot 2x + C$

4) $\int \tan^2 8x\, dx = \frac{1}{8}\tan 8x - x + C$

6) $\int \cos^2 2x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C$

أمين فرهود الركابي
07804206869

$$(17)\ \int \sin^2 8x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 16x}{32} + c$$

$$(18)\ \int \cos^4 3x\, dx = \int \left((\cos^2 3x)^2\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 6x}{12}\right)^2 dx$$

ونكمل الحل
نفس التربيع

$$(3)\ \int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\, dx$$

$$= \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{1-\sin x}\, dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{1-\sin x}\, dx$$

$$= \int \frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)\cos x}{\cancel{(1-\sin x)}}\, dx$$

$$= \int (1+\sin x)\cos x\, dx = \int \cos x\, dx + \int \sin x \cos x\, dx$$

$$= \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

الدالة المقابلة (التكامل المحدد)

إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فانه توجد دالة $F(x)$ مستمرة على الفترة $[a,b]$ بحيث

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

نستطيع بذلك ايجاد قيمة التكامل المحدد للدالة كالتالي

$$\int_a^b f(x) = \left[F(x)\right]_a^b$$

أي تعويض الحد الأعلى ـــ تعويض الحد الأسفل

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

مثال: لتكن $f:[1,2]\to R$ حيث $f(x)=2x$

وان $F:[1,2]\to R$ حيث $F(x)=x^2$

هل ان F دالة مقابلة لـ f ثم جد $\int_1^2 f(x)$

الحل/

f دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق

F دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق

$\therefore F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)$ مقابلة للدالة f

$$\int_1^2 f(x)=[F(x)]_1^2$$

$$=(2)^2-(1)^2=4-1=3$$

مثال: بين ان $F(x)=\sin x$ حيث $[0,\frac{\pi}{2}]\to R$

هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=\cos x$ حيث $[0,\frac{\pi}{2}]\to R$

ثم جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)$

الحل: الدالة مستمرة على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

وقابلة للاشتقاق

وكذلك

$F'(x)=\cos x$

$\therefore F$ مقابلة لـ f

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)=[F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1$$

أمين فرهود الركابي
07804206869

(2) ص 181

بين أن $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث

$F(x) = \sin x + x \quad F: [0, \frac{\pi}{6}] \to R$

$f(x) = 1 + \cos x \quad f: [0, \frac{\pi}{6}] \to R$

ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$

الحل

الدالتان $F(x)$ ، $f(x)$ مستمرتان وقابلتان للاشتقاق

$F'(x) = \cos x + 1 = f(x)$

∴ الدالة $F(x)$ مقابلة للدالة $f(x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) = \Big[F(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \left(\sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) - (\sin 0 + 0)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - (0)$$

$$= \frac{3+\pi}{6}$$

التكامل المحدد لدالة القيمة المطلقة

يتم هنا استخدام تعريف القيمة المطلقة حيث ان الدالة لها قاعدتان

$\forall x \geq 0$ (الدالة موجبة)

$\forall x < 0$ (الدالة سالبة)

مثال في الأسئلة التالية: جد قيمة

$$\int_0^2 |x-1|\,dx$$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) & \forall\, x \geq 1 \\ -(x-1) & \forall\, x < 1 \end{cases}$$

$1 \in [0,2]$ وهنا تجزئ الفترة

$\therefore [0,1]\ ,\ [1,2]$

$$\int_0^2 |x-1|\,dx = \int_0^1 (-x+1)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= \left[\frac{-x^2}{2} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{-(0)^2}{2} + 0\right)\right] + \left[\left(\frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

مثال :

$$\int_{-1}^{1} |x+1|\,dx$$

$$f(x) = |x+1| \begin{cases} x+1 & \forall\, x \geq -1 \\ 1-x & \forall\, x < -1 \end{cases}$$

$-1 \in [-1,1]$ لا يجزئ الفترة

فترة التكامل السالب لا يمتا خارج الفترة

$\therefore$

$$\int_{-1}^{1} |x+1|\,dx = \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{(1)^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

...مل الدالة الزوجية

لايجاد تكامل الدالة (الزوجية) ذات قاعدتين نتبع
1) نعوض العدد في الفترة بالقاعدة التي معها (=)
2) نجد الغاية من جهة اليمين (القاعدة ذات >) L_1
3) نجد الغاية من جهة اليسار (القاعدة ذات <) نجد L_2
4) نلاحظ $L_2 = L_1$ كذلك

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

5) نجزئ التكامل الى تكاملين يسار ويمين ونحله

س (4) ص 181 اذا كانت $f(x) : \begin{cases} 2x & x \geq 3 \\ 6 & x < 3 \end{cases}$ جد $\int_1^4 f(x)\,dx$

الحل

نعوض 3 عند القاعدة الاولى

$f(3) = 2(3) = 6$

نجد الغاية L_1 من جهة اليمين

$\lim_{x \to 3^+} 2x = 2(3) = 6 = L_1$

نجد الغاية L_2 من جهة اليسار

$\lim_{x \to 3^-} 6 = 6 = L_2$

$\because L_1 = L_2$ ∴ الغاية موجودة

$\therefore f(3) = \lim_{x \to 3} f(x)$

∴ الدالة مستمرة على $[1, 4]$

$$\int_1^4 f(x) = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx$$

$$= \int_1^3 6\,dx + \int_3^4 2x\,dx = \left[6x\right]_1^3 + \left[\frac{2x^2}{2}\right]_3^4$$

$$= \left[6x\right]_1^3 + \left[x^2\right]_3^4$$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$= [6(3) - 6(1)] + [(4)^2 - (3)^2]$

$= (18 - 6) + (16 - 9) = 12 + 7 = 19$

181

ت (٥) ص

اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ جد $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

الحل /

$f(0) = 3(0)^2 = 0$

$L_1 = \lim_{x \to 0} 3x^2 = 3(0)^2 = 0$

$L_2 = \lim_{x \to 0} 2x = 2(0) = 0$

$\therefore L_1 = L_2$

$\therefore$ الغاية موجودة

$\therefore f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$

$\therefore$ الدالة مستمرة على $[-1, 3]$

$\int_{-1}^{3} f(x) = \int_{0}^{-1} f(x) + \int_{-1}^{3} f(x)$

$= \int_{-1}^{0} 2x\,dx + \int_{0}^{3} 3x^2\,dx$

$= \left[\frac{2x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{3x^3}{3}\right]_{0}^{3}$

$= [x^2]_{-1}^{0} + [x^3]_{0}^{3}$

$= [(0)^2 - (-1)^2] + [(3)^3 - (0)^3] = (-1) + (27)$

$= 26$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

اللوغارتم الطبيعي $\ln x$

... نثبت ذلك تكامل دالة اللوغارتم
... الآن المعرف على مشتقتها من قبل.

$$y = \ln u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

أو

$$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{1}{u}u'$$

مثال

① $y = \ln(5x+1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5x+1}(5) = \frac{5}{5x+1}$$

② $y = \ln(2x^5 - 2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10x}{(2x^5-2)}$$

③ $y = \ln(\sin x + 1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$$

وهكذا

...الآن نتعرف على مشتقة الدالة الاسية e^u

$$y = e^u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

مثال

1) $y = e^{3x^2+1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{3x^2+1}(6x)$

2) $y = e^{\sin 3x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\sin 3x}\, 3(\cos 3x)$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

كذلك يجب التعرف على كيفية اشتقاق دالة اساسها ثابت (a) واسها عبارة عن دالة

$$y = a^{u} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^{u}\,\frac{du}{dx}\ln a$$

$$y = 2^{3x+1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^{3x+1}(3)\ln(2)$$

$$y = 3^{\sin x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3^{\sin x}(\cos x)\ln 3$$

الآن :

① $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

② $\int e^{u}\,du = e^{u} + c$

مثال

① $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx = \ln|x^2+5x+1| + c$

② $\int \frac{6x+2}{3x^2+2x-1}\,dx = \ln|3x^2+2x-1| + c$

③ $\int e^{x^2-3x+2}(2x-3)\,dx = e^{x^2-3x+2} + c$

④ $\int e^{2x^2+x-1}(4x+1)\,dx = e^{2x^2+x-1} + c$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

تمارين (4-5) P193

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي

(a) $y = \ln 3x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{3x}$

(b) $y = \ln\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{x}$

(c) $y = \ln(x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

(d) $y = (\ln x)^2 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2(\ln x)\frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$

(e) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^3$

$y = \ln\frac{1}{x^3} \Longrightarrow y = \ln x^{-3} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^{-4}}{x^{-3}} = \frac{-3}{x}$

(f) $y = \ln(2 - \cos x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$

(g) $y = e^{-5x^2+3x+5} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-5x^2+3x+5}(-10x+3)$

(h) $y = e^{\sqrt{x}} \Longrightarrow y = e^{x^{1/2}} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x^{1/2}}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$

(i) $y = 7^{\frac{-x}{4}} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 7^{\frac{-x}{4}}\left(-\frac{1}{4}\right)\ln(7)$

(j) $y = x^2 e^x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x^2(e^x \cdot 1) + e^x(2x)$

$= x^2e^x + 2xe^x$

2) جد التكاملات الآتية

a) $\int_0^3 \frac{1}{(x+1)}\,dx$

لاحظة رفع $(x+1)$ لأن البسط

وتغيير اشارة $(x+1)$

$= \Big[\ln|x+1|\Big]_0^3 + c$

$= \ln|3+1| - \ln|0+1| = \ln 4 - \ln 1 = \ln 2^2 - \ln 1$

$= 2\ln 2 - 0$

$= 2\ln 2$

أمين الرهيود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

b) $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx$

$= \left[\ln|x^2+9|\right]_0^4$

$= \ln|(4)^2+9| - \ln|0+9|$

$= \ln|25| - \ln 9$

$= \ln 5^2 - \ln 3^2$

$= 2\ln 5 - 2\ln 3$

(c) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}(2)\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_{\ln 3}^{\ln 5}$

$= \frac{1}{2}\left[e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3}\right]$

$e^{\ln x} = x$

$= \frac{1}{2}\left[e^{\ln 5^2} - e^{\ln 3^2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[5^2 - 3^2\right] = \frac{1}{2}(25-9) = \frac{1}{2}(16) = 8$

(d) $\int_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx$

$= -\int_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx = -\left[e^{-x}\right]_0^{\ln 2}$

$= -\left[e^{-\ln 2} - e^{-0}\right]$

$e^0 = 1$

$= -\left[e^{-\ln 2} - e^0\right] = -e^{-\ln 2} + 1$

$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

(e) $\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x\,dx = \left[\frac{(1+e^x)^3}{3}\right]_0^1$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$$= \left[\frac{(1+e^1)^3}{3} - \frac{(1+e^0)^3}{3} \right]$$

$$= \left[\frac{(1+e)^3}{3} - \frac{(1+1)^3}{3} \right] = \frac{(1+e)^3 - 8}{3}$$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}\,dx$

$\ln 1 = 0$

$$= \left[\ln |x^3+4x+1| \right]_0^1$$

$$= \ln |(1)^3+4(1)+1| - \ln |0^3+4(0)+1|$$

$$= \ln 6 - \ln 1$$

$$= \ln 6 - 0 = \ln 6$$

(g) $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{2\sqrt{x}}$

$$= \int_1^4 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} e^{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= \left[e^{x^{\frac{1}{2}}} \right]_1^4 = \left[e^{4^{\frac{1}{2}}} \right] - \left[e^{1^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$= e^{(2^2)^{\frac{1}{2}}} - [e^1]^{\frac{1}{2}} = e^2 - e^{\frac{1}{2}}$$

(h) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}\,dx$

$$= \left[\ln |2+\tan x| \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\ln |2+\tan(+45^\circ)| \right] - \ln |2+\tan^{-}45^\circ|$$

$$= \ln |2+1| - \ln |2-1| = \ln 3 - \ln 1$$

$$= \ln 3$$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨١٩

$$(i)\quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cos x\,dx$$

$$= \left[\frac{\sin x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \ \ldots$$

$$(k)\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x\,dx$$

$$= -\left[e^{\cos x}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -\left[e^{\cos\frac{\pi}{2}} - e^{\cos 0}\right]$$

$$= -\left[e^{0} - e^{1}\right] = -[1-e] = e-1$$

$$(L)\quad \int_{1}^{2} x\, e^{-\ln x}\,dx \ \ldots$$

$$= \int_{1}^{2} x\, e^{\ln x^{-1}}\,dx$$

$$= \int_{1}^{2} x\,(x^{-1})\,dx$$

$$= \int_{1}^{2} dx = [x]_{1}^{2} = 2-1 = 1$$

وما توفيقي إلا بالله العلي العظيم .

تمنياتي لكم السداد

أخوكم الأستاذ

أمين فرهود الركابي

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$$\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 2$$

$$= \int_1^8 \frac{(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx$$

$$= \int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}(x^{-\frac{2}{3}})\,dx$$

$$= 3\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}}\,dx$$

$$= 3\left[\frac{(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^8$$

$$= \cancel{3}\left(\frac{2}{\cancel{3}}\right)\left[(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^8$$

$$= 2\left[(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^8$$

$$= 2\left[(8^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}} - (1^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= 2\left[((2^3)^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}} - (1-1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= 2\left[(2-1)^{\frac{3}{2}} - (0)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= 2\left[(1)^{\frac{3}{2}} - 0\right]$$

$$= 2(1) = \underline{\underline{2}}$$

اثبت ان

(b) $\int_{-2}^{4} |3x-6|\,dx = 30$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 6 & x \geq 2 \\ 6 - 3x & x < 2 \end{cases}$$

$2 \in (-2, 4)$ نجزئ الفترة 2

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (6 - 3x)\,dx + \int_{2}^{4} (3x - 6)\,dx$$

$$= \left[6x - \frac{3x^2}{2}\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{3x^2}{2} - 6x\right]_{2}^{4}$$

$$= \left[\left(6(2) - \frac{3(2)^2}{2}\right) - \left(6(-2) - \frac{3(-2)^2}{2}\right)\right]$$

$$+ \left[\frac{3(4)^2}{2} - 6(4) - \left(\frac{3(2)^2}{2} - 6(2)\right)\right]$$

$$= (12 - 6) - (-12 - 6) + (24 - 24 - 6 + 12)$$

$$= 6 + 18 + 6 = \underline{\underline{30}}$$

س4 ص194

$f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2, 6]$ فاذا كان $\int_{1}^{6} f(x)\,dx = 6$ ، وكان $\int_{-2}^{6} [f(x) + 3]\,dx = 32$ جد $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$

الحل//

$$\int_{-2}^{6} [f(x) + 3]\,dx = 32$$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + 3\int_{-2}^{6} dx = 32$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{6} f(x)\,dx + 3\int_{-2}^{6} dx = 32$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx + 6 + [3x]_{-2}^{6} = 32$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx + 6 + [(3(6)) + (3)(2)] = 32$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx + 6 + (18 + 6) = 32$$

$$= \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + 30 = 32$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 32 - 30$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 2$$

س(5) ص 194

جد قيمة a إذا علمت

$$\int_{1}^{a} \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_1^a = 2\,[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right] = 2\,[\tan 45^\circ - \tan 0]$$

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} - 1 = 2\,[1 - 0]$$

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} - 1 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} - 3 = 0 \quad \times 2$$

Scanned by CamScanner

أستاذ فرهود الركابي
٠٧٨٠١٢٠٦٨٦٩

$a^2 + a - 6 = 0$ نجري

$(a+3)(a-2) = 0$

$a+3=0 \Rightarrow a=-3$ يهمل

$a-2=0 \Rightarrow a=2$ او

س (6) ص 194

لتكن $f(x) = x^2+2x+k$ حيث $k \in R$ دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) جد $\int_1^3 f(x)\,dx$

الحل

بما ان النهاية الصغرى تعني y

$\therefore y = -5$

الان نجد الاحداثي السيني x حتى نجد نقطة

$f'(x) = 2x+2$

$f'(x) = 0$ نجعل

$2x+2=0$ $\div 2$

$x = -1$

نتأكد بانها تمثل نقطة نهاية صغرى $f(x)$ حيث $(-1,-5)$

$- - - - \overset{-1}{|} + + +$ تقعر

$\therefore$ النهاية صغرى محلية

$(-1,-5) \in f(x)$

$\therefore$ تحقق معادلة الدالة

$-5 = (-1)^2 + 2(-1) + k$

$-5 = 1 - 2 + k \Rightarrow -5 = -1 + k \Rightarrow k = -4$

$f(x) = x^2 + 2x - 4$

$$\int_1^3 (x^2+2x-4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 4x\right]_1^3$$

ثم نعوض العدد الاعلى - نعوض الادنى

١٩٤ ص (7)

إذا كان للمنحني $f(x)=(x-3)^3+1$ نقطة انقلاب (a,b) جد العدد الحقيقي للمقدار

$$\int_0^b f'(x)\,dx - \int_0^a f''(x)\,dx$$

$$f'(x)=3(x-3)^2 \quad ; \quad f''(x)=6(x-3)$$

نجعل $f'(x)=0$

لأن (a,b) نقطة انقلاب

$$6(x-3)=0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$$

نعوض $x=3$ بالدالة

$$f(3)=(3-3)^3+1$$

$$=0^3+1$$

$$=1 \Rightarrow (3,1) \text{ نقطة انقلاب}$$

$\therefore (a,b)$ نقطة انقلاب

$$\therefore a=3 \quad b=1$$

$$\int_0^1 3(x-3)^2\,dx + \int_0^3 6(x-3)\,dx$$

$$=3\int_0^1 (x-3)^2\,dx + \int_0^3 (6x-18)\,dx$$

$$=3\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{6x^2}{2}-18x\right]_0^3$$

$$=\left[(x-3)^3\right]_0^1 + \left[3x^2-18x\right]_0^3$$

$$=\left[(1-3)^3-(0-3)^3\right] + \left[(3(3)^2-18(3)) - (3(0)^2-18(0))\right]$$

$$=(-2)^3-(-3)^3+(27-54-0)$$

$$=-8+\cancel{27}+\cancel{27}+54$$

$$=-8+54=46$$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

2) المساحات المستوية
مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني الدالة ومحور السينات ضمن فترة

خطوات الحل

1_ نجعل $f(x)=0$ حيث نفرضها بالقوالب ونحل المعادلة لنأتي بقيم x نحصل على قيم x

2_ نلاحظ فيما اذا كانت $x \in$ للفترة المعطاة بالسؤال ام لا فاذا كانت تنتمي فانها سوف تجزئ الفترة المعطاة الى فترات جزئية واذا لم تنتمِ فهذا يعني لدينا فترة واحدة فقط (الاصلية)

3_ نجد تكامل الدالة على كل فترة جزئية.

4_ المساحة الكلية هي مجموع القيم المطلقة للمساحات الناتجة.

ملاحظة: في بعض الاحيان تكون الفترة المعطاة على شكل مستقيمات $x=a$ ، $x=b$ فتكون فترة $[a,b]$.

مثال:
جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^3-4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2,2]$ أو [يرد في السؤال والمستقيمان $x=-2$ ، $x=2$]

الحل
نجعل $f(x)=0$ الخطوة (1)

$x^3-4x=0$

$x(x^2-4)=0$

$x(x-2)(x+2)=0$

$x=0$, $x=2$, $x=-2$

خطوة (2)

$x\!\!\!/ \;\; 0, 2, -2 \in [-2,2]$

∴ اصبح لدينا فترات جزئية

$[-2,0]$, $[0,2]$

الست فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$= \left[\frac{0^4}{4} - 2(0)^2\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2\right]$$

$$= 0 - [4 - 8] = 4$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= \left[\frac{(2)^4}{4} - 2(2)^2\right] - \left[\frac{(0)^4}{4} - 2(0)^2\right]$$

$$= [4 - 8] - [0]$$

$$= -4$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$ خطوة (4)

$$= |4| + |-4| = 8$$ وحدة مربعة

ملاحظة: اذا لم يعط في السؤال أي فترة فان قيم x الناتجة هي التي تمثل فترة او اكثر.

مثال: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات

الحل

let $f(x) = 0$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$x(x-2)(x-1) = 0$$

$$x = 0 \ , \ x = 2 \ , \ x = 1$$

$$[0, 1] \ , \ [1, 2]$$

$$A_1 = \int_{0}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx =$$

$$A_1 = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_{0}^{1} = \left[\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 + (1)^2\right] - \left[\frac{(0)^4}{4} - (0)^3 + (0)^2\right]$$

$A_1 = \left[\frac{1}{4} - 1 + 1\right] - [0] = \frac{1}{4}$

$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2$

$= \left[\frac{(2)^4}{4} - (2)^3 + (2)^2\right] - \left[\frac{1^4}{4} - (1)^3 + (1)^2\right]$

$= [4 - 8 + 4] - \left[\frac{1}{4} - 1 + 1\right]$

$= -\frac{1}{4}$

$\therefore A = |A_1| + |A_2|$

$= \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مربعة

مثال ⑤: جد مساحة المنطقة التي يحدها منحني الدالة $f(x) = x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x = 1$, $x = 3$

الحل/

الفترة حسب المعطى $[1,3]$

نجعل $f(x) = 0$

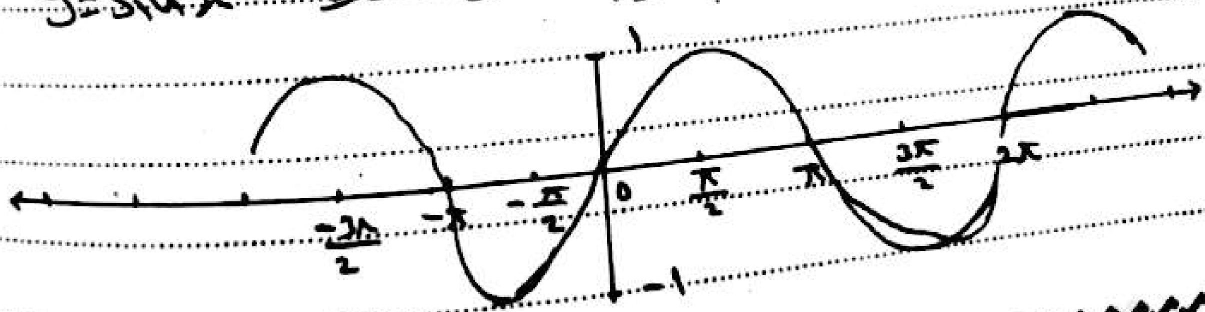
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1,3]$

وهذا يعني الفترة لا تتجزأ

$A = \int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left[\frac{(3)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3}\right] = \frac{27}{3} - \frac{1}{3}$

$= \frac{26}{3}$ وحدة مربعة

مثال ⑥: اذا كانت الدالة المعطاة هي دالة مثلثية فعلينا ان نراجع رسم منحني الدالة مثلاً $y = \sin x$



Scanned by CamScanner

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y=\sin x$ ومحور السينات على الفترة $\left[\frac{-\pi}{2},\pi\right]$

الحل//

نجعل $y=0$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi \;,\; n\in Z$

$n = 0, 1, -1, 2, -2$

$x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$n=1 \Rightarrow x=\pi \in \left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$n=-1 \Rightarrow x=-\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$n=-2 \Rightarrow x=-2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$n=2 \Rightarrow x=2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$$A_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=\left[-\cos(0)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=-1+0=-1$$

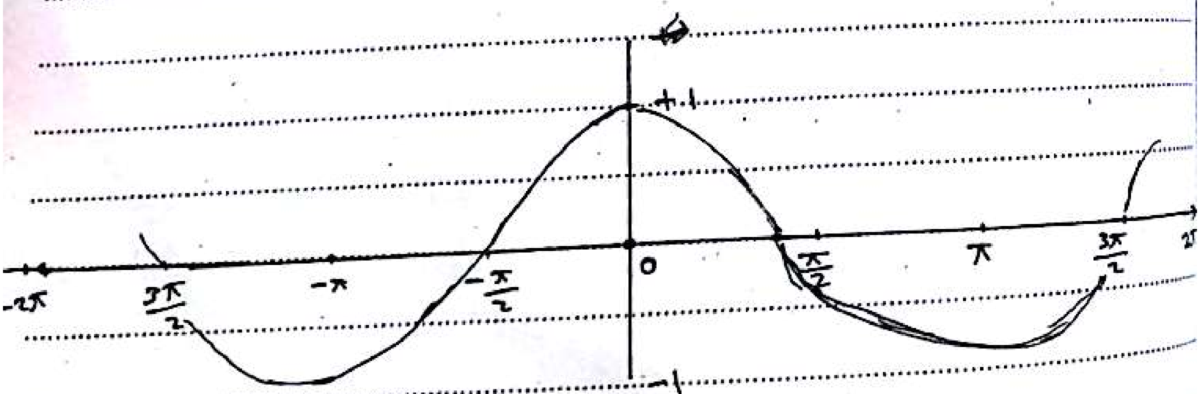
$$A_2=\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_{0}^{\pi}=\left[-\cos(\pi)+\cos(0)\right]$$

$$=1+1=2$$

$A=|A_1|+|A_2|$

$=|-1|+|2| \Rightarrow 1+2=3$ وحدة مربعة

الدالة $(\cos x)$



أمين الرهيود الركابي ٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

مثال: جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi, \pi]$

نجعل $y = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad n = 0, -1, 1, -2$

$n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$

$n = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$

$n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$

$n = -2 \Rightarrow x = \frac{-3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$

الفترة $[-\pi, \pi]$ تجزئ إلى

$[-\pi, -\frac{\pi}{2}], \; [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \; [\frac{\pi}{2}, \pi]$

$A_1 = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}$

$\sin(-\pi) = -\sin\pi$

$A_1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) - \sin(-\pi) = -\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi = -1 + 0 = -1$

$A_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2}) = 1 + 1 = 2$

$A_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$

نجمع التكاملات A_1, A_2, A_3

$A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$

$A = |-1| + |2| + |-1| = 1 + 2 + 1 = 3 + 1 = 4$ وحدة مساحة

أمين فرهود الركابي
07804206869

تمارين (4-6) ص 208

1) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = -1$ ، $x = 1$

الحل / الفترة $[-1, 1]$
نجد نقط التقاطع مع محور السينات بجعل

$y = 0$

$x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$

$x = 0 \quad , \quad x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

$0 \in [-1, 1]$
نجزئ الفترة الى
$[-1, 0]$ و $[0, 1]$
نجد التكاملات على الفترتين

$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \left[\left(\frac{(0)^5}{5} - \frac{(0)^2}{2}\right) - \left(\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^2}{2}\right)\right]$$

$$= -\left(\frac{-1}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2+5}{10}$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{7}{10}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} (x^4 - x)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[\left(\frac{(1)^5}{5} - \frac{(1)^2}{2}\right) - \left(\frac{(0)^5}{5} - \frac{(0)^2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2-5}{10} = \frac{-3}{10}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{7}{10}\right| + \left|\frac{-3}{10}\right| = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = \underline{\underline{1}}$$ وحدة مساحة

2) جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ وعلى الفترة $[-2, 3]$ ومحور السينات.

الحل / بجعل $y = 0$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$

إما $x^2 = 4$

$x = \mp 2 \in [-2, 3]$

أو $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ يهمل

تجزئ الى الفترات $[-2, 3]$:

$[-2, 2]$, $[2, 3]$

$$A_1 = \int_{-2}^{2} (x^4 - 3x^2 - 4)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - x^3 - 4x\right]_{-2}^{2} = \left[\left(\frac{(2)^5}{5} - (2)^3 - 4(2)\right) - \left(\frac{(-2)^5}{5} - (-2)^3 - 4(-2)\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{32}{5} - 8 - 8\right) - \left[\left(\frac{-32}{5}\right) + 8 + 8\right]\right]$$

$$= \frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{5} - 8 - 8$$

$$= \frac{64}{5} - 32 = \frac{-96}{5}$$

$$A_2 = \int_{2}^{3} (x^4 - 3x^2 - 4)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^3 - 4x\right]_{2}^{3}$$

ثم تكمل الحل

(3) جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات

نجعل $f(x) = 0$

$x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$

$x = 0$, $x = \mp 1$

$[-1, 0]$, $[0, 1]$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = \left[\left(\frac{0^5}{5} - \frac{0^3}{3}\right) - \left(\frac{-1^5}{5} - \frac{-1^3}{3}\right)\right]$$

$$= -\left(\frac{-1}{5}+\frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{-3+5}{15}\right) = -\left(\frac{2}{15}\right)$$

$$A_2 = \int_0^1 (x^4 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \left[\left(\frac{1^5}{5} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^5}{5} - \frac{0^3}{3}\right)\right] = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3-5}{15} = \frac{-2}{15}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{-2}{15}\right| + \left|\frac{-2}{15}\right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$ وحدة مربعة

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $y = \sin 3x$ ومحور السينات على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ك١

نجد نقاط التقاطع مع محور السينات نجعل

$$y = 0 \Rightarrow \sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = 0 + n\pi$$

$$n = 0 \Rightarrow x = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$n = 1 \Rightarrow 3x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$n = -1 \Rightarrow 3x = -\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$n = 2 \Rightarrow 3x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$n = -2 \Rightarrow 3x = -2\pi \Rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

∴ فترات التكامل $\left[0, \frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\,dx = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{\cancel{3}}\right) - \left(-\frac{1}{3}\cos 3(0)\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}(-1)\right) - \left(-\frac{1}{3}(1)\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\,dx = \left[\left(-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{3}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{3}(0) - \left(-\frac{1}{3}(-1)\right) = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{2}{3}\right| + \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ وحدة مربع

س (5) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

الحل

نجد نقاط التقاطع مع محور السينات

نجعل $y = 0$

$2\cos^2 x - 1 = 0$

$\cos 2x = 0$ $\quad * \; \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$2x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

$n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ لا يجزئ

$n = 1 \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ لا يجزئ

$n = -1 \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

$n = 2 \Rightarrow 2x = \cancel{3\pi} \Rightarrow x = \cancel{\pi} \; \frac{5\pi}{4} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

$n = -2 \Rightarrow 2x =$

س (5) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

الحل

نجد نقاط التقاطع مع محور السينات

نجعل $y = 0$

$2\cos^2 x - 1 = 0$ $\quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 0$

$2x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

$n = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + (0)\pi \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$n = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + (1)\pi \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

وهنا لا حاجة لان نأخذ قيم (n) سالبة لان الفترة موجبة

$[0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow [0, \frac{\pi}{4}], [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right) - (0) = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = (0) - \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$
$$= \left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$ وحدة مساحة

مساحة المنطقة المحددة بمنحنيين

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$
لتكن $g(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ فلإيجاد المساحة المحددة بينهما نولد دالة ثالثة منهما حسب العلاقة

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

حيث $h(x)$ هي الدالة المولدة

ونتبع نفس الخطوات السابقة على الدالة $h(x)$

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = x^3$ والمستقيم $y = x$

الحل

$$\because h(x) = f(x) - g(x)$$

$$h(x) = x^3 - x$$

نجد نقاط التقاطع نجعل $h(x) = 0$

$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x = 0 \quad , \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$$
$$\therefore [-1, 0] \, , \, [0, 1]$$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x) \, dx \Rightarrow A_1 = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$
$$A_1 = \left[\left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2}\right) - \left(\frac{-1^4}{4} - \frac{-1^2}{2}\right)\right]$$

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$A_1 = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$

$A_1 = -\left(\frac{1-2}{4}\right) = -\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

$A_2 = \int_0^1 (x^2 - x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2}\right)\right]$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$A = |A_1| + |A_2|$

$A = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

مثال ٥: جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x) = \cos x$

و $g(x) = \sin x$ على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

اذا $h(x) = f(x) - g(x)$; $f(x) > g(x)$

أو $h(x) = g(x) - f(x)$; $g(x) > f(x)$

$h(x) = \sin x - \cos x$

نجد نقاط التقاطع مع محور السينات نجعل $h(x) = 0$

$\sin x - \cos x = 0$

$\sin x = \cos x$] $\div \cos x$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$

$\tan x = 1$

$\tan x = \tan \frac{\pi}{4}$

$\therefore x = \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ وتجزئ

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx \Rightarrow A_1 = \left[(\cos x) + \sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left[\left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}\right) - \left(\cos -\frac{\pi}{2} + \sin\right.\right.$

أمين فرهود الركابي
07804206869

$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] - [(0) + (1)]$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} + 1$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\, dx = \left[\cos(x) + \sin(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left[\cos(\tfrac{\pi}{2}) + \sin(\tfrac{\pi}{2})\right] - \left[\left(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \sin(\tfrac{\pi}{4})\right)\right]$

$= [0 + 1] - \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$

$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$

$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}\right|$

$= \frac{\cancel{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} - \cancel{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$ وحدة مربعة

تمارين (4 – 6) P_{208}

ـة (6) جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $y = \sqrt{x-1}$ ، $y = \frac{1}{2}x$

وعلى الفترة $[2,5]$

الحل

نولد دالة $h(x)$

$h(x) = f(x) - g(x)$

$h(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{2}x$

نجعل $h(x) = 0$

بالتربيع $\sqrt{x-1} = \frac{1}{2}x$

$x - 1 = \frac{x^2}{4}$

$x^2 = 4x - 4$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$ لا تجزئ

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

$A=\int_{2}^{5}\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}x\right)dx$

$A=\int_{2}^{5}\left((x-1)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x\right)dx$

$A=\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{4}\right]_{2}^{5}$

ونكمل الحل بتعويض الحدود على الطالب

س (7) جد المساحة المحددة بالدالتين $y=x^4-12$

$y=x^2$

الحل / لم يعط هنا فترة فمن قيم x الناتجة نكون فترة

$h(x)=f(x)-g(x)$

$h(x)=(x^4-12)-(x^2)$

$h(x)=x^4-x^2-12$

نجعل $h(x)=0$

$x^4-x^2-12=0$

$(x^2-4)(x^2+3)=0$

$x^2-4=0 \Rightarrow x=\mp 2$

$x^2+3=0 \Rightarrow x^2=-3$ لا يمكن

$[-2,2]$

$A=\int_{-2}^{2}(x^4-x^2-12)\,dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-12x\right]_{-2}^{2}$

$=\left[\left(\frac{(2)^5}{5}-\frac{(2)^3}{3}-12(2)\right)-\left(\frac{(-2)^5}{5}-\frac{(-2)^3}{3}-12(-2)\right)\right]$

$=\left[\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-24\right]-\left(\frac{-32}{5}+\frac{8}{3}+24\right)$

$=\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-24+\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-24$

$=\frac{64}{5}-\frac{16}{3}-48$ ونكمل الحل

أمين فرهود الركابي
٠٧٨٠٤٢٠٦٨٦٩

س (8) جد مساحة المحددة بالدالتين $f(x)=\sin x$
$g(x)=\sin x\cos x$ حيث $x\in[0,2\pi]$

الحل

$h(x)=f(x)-g(x)$

$h(x)=\sin x\cos x-\sin x$

$h(x)=0$

$\sin x\cos x-\sin x=0$

$\sin x\cos x=\sin x \quad]\div\sin x$

$\cos x=1$

$\cos x>0$ يعني في الربع الاول والرابع

$x=0\in[0,2\pi]$
$x=2\pi\in[0,2\pi]$ لا تجزئ

$$A=\int_0^{2\pi}(\sin x\cos x-\sin x)\,dx$$

$$=\left[\frac{\sin^2 x}{2}+\cos x\right]_0^{2\pi}$$

$$=\left[\left(\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2})}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\sin^2(0)}{2}+\cos(0)\right]$$

س (9) جد مساحة المحددة بالدالتين $f(x)=2\sin x+1$
$g(x)=\sin x$ حيث $x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$

$h(x)=2\sin x+1-\sin x$

$h(x)=\sin x+1$

$y=0$

$\sin x+1=0$

$\sin x=-1$

الزاوية في الربع الثالث والرابع

$\frac{3\pi}{2}$ بالاستناد

الثالث $x=\frac{3\pi}{2}+\pi \Longrightarrow x=\frac{5\pi}{2}\notin[0,\frac{3\pi}{2}]$

أمين فرهود الركابي ٠٧٨٠١٢٠٦٨٦٩

$x = 2\pi - \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ تجزئ

$[0, \frac{\pi}{2}], [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 1)\,dx = \left[-\cos x + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = [-\cos\frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2})) - (-\cos(0) + 0)]$

$= [0 + \frac{\pi}{2}] - [-1 + 0]$

$= \frac{\pi}{2} + 1$

$A_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1)\,dx = \left[-\cos x + x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$

$= [(-\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}) - (-\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$

$= [0 + \frac{3\pi}{2}) - (0 + \frac{\pi}{2})$

$= \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$A = |A_1| + |A_2| = \frac{\pi}{2} + 1 + \pi = \frac{\pi + 2 + 2\pi}{2} = \frac{3\pi + 2}{2}$ مسام

س (15) جد المساحة المحددة بالدالة $y = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات.

الحل/

نجد نقاط التقاطع مع السينات

$y = 0$ نجعل

$x^3 + 4x^2 + 3x = 0$

$x(x^2 + 4x + 3) = 0$

$x(x+3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -3,\ x = -1$

برنامج رحلتي في السادس

$[-3, -1]$ و $[-1, 0]$

$$A_1=\int_{-3}^{-1}(x^3+4x^2+3x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{-1}$$

$$=\left[\left(\frac{(-1)^4}{4}+\frac{4(-1)^3}{3}+\frac{3(-1)^2}{2}\right)-\left(\frac{(-3)^4}{4}+\frac{4(-3)^3}{3}+\frac{3(-3)^2}{2}\right]\right.$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{81}{4}-\frac{108}{3}+\frac{27}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{3-16+18}{12}\right)-\left(\frac{243}{12}-\frac{432}{12}+\frac{162}{12}\right)$$

$$=\frac{5}{12}-\left(\frac{-27}{12}\right)=\frac{5+27}{12}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}$$

$$A_2=\int_{-1}^{0}(x^3+4x^2+3x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$

$$=\left[\left(\frac{0}{4}+\frac{0}{3}+\frac{0}{2}\right)-\left(\frac{-1^4}{4}+\frac{4(-1)^3}{3}+\frac{3(-1)^2}{2}\right]\right.$$

$$=-\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right]=-\left(\frac{3-16+18}{12}\right)=-\left(\frac{5}{12}\right)$$

$$A=|A_1|+|A_2|=\left|\frac{8}{3}\right|+\left|-\frac{5}{12}\right|=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{32+5}{12}=\frac{37}{12}$$

تطبيقات / المسافة الفيزيائية (d)

يرمز للمسافة بالرمز d وللإزاحة بالرمز S وللسرعة v

وللتعجيل a او بمشتقة السرعة (v') وللزمن t

والفرق بين المسافة والإزاحة ان علاقة المسافة تكون ضمن القيمة المطلقة (لا يجوز المسافة بالسالب) اما الإزاحة بدون قيمة مطلقة والمسافة تكون ضمن فترة (تكامل محدد) اما الإزاحة الفترة او بدونها حسب السؤال

ملاحظة: الازاحة يعبر عنها احياناً بـ [البعد أو الموضع أو أين يصل الجسم أو أين تقف الجسم أو موقع الجسم]

مثال: جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(18)\,m/s^2$ فاذا كانت سرعته تساوي $(82)\,m/s$ بعد مرور 4 ثواني
جد (a) المسافة خلال الثانية الثالثة
(b) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 3 ثواني.

* عندما نكامل التعجيل نحصل على السرعة
عندما نكامل السرعة نحصل على المسافة او الازاحة

(a) $v = \int a(t)\,dt$

$v = \int 18\,dt \Rightarrow v = 18t + c \quad \text{---} (1)$

$82 = (18 \times 4) + c$

$82 = 72 + c$

$c = 10$

نعوض c بالعلاقة (1)

$v = 18t + 10$

لم تأخذ القيمة المطلقة لا حاجة هنا لها لان $v > 0$

$$d = \int_2^3 (18t + 10)\,dt = \left[\frac{18t^2}{2} + 10t\right]_2^3$$

$$= \left[9t^2 + 10t\right]_2^3 = \left[9(3)^2 + 10(3)\right] - \left[9(2)^2 + 10(2)\right]$$

$$= [81 + 30] - [36 + 20] = [111 - 56] = 55\,m$$

b) $$S = \int_0^3 (18t + 10)\,dt = \left[9t^2 + 10t\right]_0^3$$

$$= [81 + 30] - [0]$$

$$= 111\,m$$

تكامل السرعة يعطينا المسافة او البعد او الازاحة

ص 209

ت (11) جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 - 6t + 3)\ m/s$

احسب

(a) المسافة المقطوعة في الفترة $[2, 4]$

(b) الازاحة في الفترة $[0, 5]$

الحل

(a) $d = \left| \int_2^4 (3t^2 - 6t + 3)\,dt \right| = \left| \left[t^3 - 3t^2 + 3t \right]_2^4 \right|$

$= \left| \left[(4)^3 - 3(4)^2 + 3(4) \right] - \left[(2)^3 - 3(2)^2 + 3(2) \right] \right|$

$= \left| (64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6) \right|$

$= |28 - 2| = |26| = 26\ m$

(b) $\int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)\,dt = \left[t^3 - 3t^2 + 3t \right]_0^5$

$= \left[(5)^3 - 3(5)^2 + 3(5) \right] - \left[0^3 - 3(0)^2 + 3(0) \right]$

$= (125 - 75 + 15) - 0$

$= 50 + 15 = 65\ m$

ت (12) جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t + 12)\ m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $90\ m/s$ جد

(a) السرعة عندما $t = 2$

(b) المسافة خلال الفترة $[1, 2]$

(c) الازاحة بعد (10) ثواني من بدء الحركة.

الحل $v(t) = \int a(t)\,dt$

$v(t) = \int (4t + 12)\,dt = 2t^2 + 12t + c$

معطى $t = 4$ ...

معطى

$v(t)=90$

$90=2(4)^2+12(4)+c$

$90=32+48+c$

$c=10$

$v(t)=2t^2+12t+10 \quad m/se$ السرعة

الآن السرعة عند $t=2$

$v(2)=2(2)^2+12(2)+10$

$v(2)=8+24+10$

$v(2)=42 \quad m/se$

$$d=\int_1^2 (2t^2+12t+10)\,dt$$

$$=\left[\frac{2t^3}{3}+6t^2+10t\right]_1^2$$

$$d=\left[\left(\frac{2(2)^3}{3}+6(2)^2+10(2)\right)-\left(\frac{2(1)^3}{3}+6(1)^2+10(1)\right)\right]$$

$$=\left[\left(\frac{16}{3}+24+20\right)\right]-\left[\left(\frac{2}{3}+6+10\right)\right]$$

$$=\frac{98}{3}$$

$$d=|d_1|=\left|\frac{98}{3}\right|=\frac{98}{3}\ m$$

3

$$S=\int_0^{10} (2t^2+12t+10)\,dt=\left[\frac{2t^3}{3}+6(t)+10t\right]_0^{10}$$

$$=\left[\frac{2(10)^3}{3}+6(10)-10(10)\right]-\left[\frac{2(0)^3}{3}+6(0)+10(0)\right]$$

$$=\left(\frac{2000}{3}+60-100\right)-(0)=\frac{4100}{3}\ m$$

ص 209
تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)\ m/s$ جد الزمن (t) اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه ، (ب) احسب التعجيل عندها.

الحل

الازاحة هو تكامل السرعة

$$S = \int v(t)\,dt$$

$$S = \int (100t - 6t^2)\,dt$$

$$S = 50t^2 - 2t^3 + c$$

الآن من منطوق السؤال
النقطة او أي جسم عندما يعود الى الموضع الاول الذي بدأ منه
يعني الازاحة = صفر نطبق نعوض $S = 0$

$$50t^2 - 2t^3 + c = 0$$

$$50(0)^2 - 2(0)^3 + c = 0$$

$$c = 0$$

* كل جسم يتحرك من السكون
يعني الازاحة = صفر
كذلك سرعته = صفر
كذلك $t = 0$

$$S = 50t^2 - 2t^3 + 0$$

$$S = 50t^2 - 2t^3\ m$$ الازاحة

$$50t^2 - 2t^3 = 0 \quad] \div 2$$

$$25t^2 - t^3 = 0$$

$$t^2(25 - t) = 0$$

اما $t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$

او $25 - t = 0$

$t = 25$ الزمن اللازم

لايجاد التعجيل نشتق السرعة

$$a(t) = v'(t) = 100 - 12t \Rightarrow a(25) = 100 - 12(25) = 100 - 300 = -200\ m/s^2$$

الحجوم الدورانية

Volumes of Revolution:

① لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y=f(x)$ المستمرة من $x=a$ الى $x=b$ وحول محور السينات يطبق العلاقة

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

② لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $x=f(y)$ المستمرة من $y=a$ الى $y=b$ وحول محور الصادات نطبق العلاقة

$$V=\pi\int_a^b x^2\,dy$$

مثال:

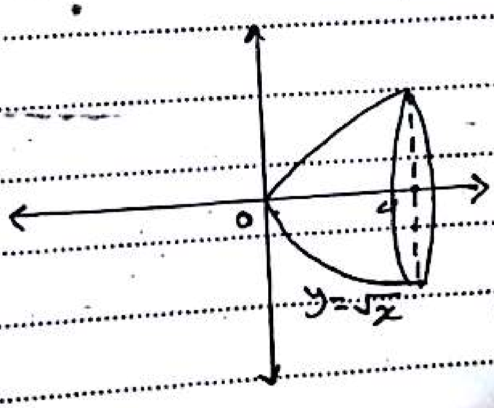
المنطقة المحددة بين المنحني $y=\sqrt{x}$ ، $0\le x\le 4$ ومحور السينات دارت حول محور السينات جد حجمها.

$$V=\int_a^b \pi y^2\,dx$$

$$V=\int_0^4 \pi(\sqrt{x})^2\,dx=\int_0^4 \pi x\,dx$$

$$=\left[\pi\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\left[\pi\frac{(4)^2}{2}-\frac{\pi(0)^2}{2}\right]=\left(\pi\frac{16}{2}-0\right)$$

$=8\pi$ وحدة مكعبة



مثال: المنطقة المحددة بين المنحني $x=\frac{1}{\sqrt{y}}$ حيث $4 \ge y \ge 1$ دارت حول محور الصادات . جد حجمها

الحل

$$V=\int_a^b \pi x^2\, dy$$

$$V=\int_1^4 \pi \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 dy \Rightarrow V=\int_1^4 \pi \frac{1}{y}\, dy$$

$$=\left[\pi \ln y\right]_1^4 = \left[\pi \ln 4 - \pi \ln 1\right]$$

$$=\pi \ln 2^2 - \pi(0)$$

$$=2\pi \ln 2 - 0 = 2\pi \ln 2$$ وحدة مكعبة

مثال: جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y=4x^2$ والمستقيمين $y=16$ ، $y=0$ حول المحور الصادي

$$V=\int_a^b \pi x^2\, dy \Rightarrow V=\int_0^{16} \pi \left(\frac{y}{4}\right) dy$$

$$x^2=\frac{y}{4}$$

$$=\left[\pi \frac{y^2}{8}\right]_0^{16} = \frac{\pi}{8}\left[(16)^2-(0)^2\right] = \frac{\pi}{8}\times 16\times 16 = 32\pi$$ وحدة مكعبة

مثال: جد الحجم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y=\frac{1}{x}$ والمستقيمين $x=\frac{1}{2}$ ، $x=1$ دورة كاملة حول المحور الصادي

الحل

$x=1 \Rightarrow y=\frac{1}{1} \Rightarrow y=1$

$x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow y=2$

$[1,2]$

بما أن الدوران حول المحور الصادي فيجب أن التكامل تكون بـ y و الدالة بدلالة x

$$y=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{y}$$

$$V=\pi\int_a^b x^2\, dy \Rightarrow V=\pi\int_1^2 \frac{1}{y^2}\, dy = \pi\left[\frac{-1}{y}\right]_1^2 = \pi\left[\frac{-1}{2}+1\right] = \frac{\pi}{2}$$ وحدة مكعبة

أمين عبد الرضا الركابي
٠٧٨٠٢٠٦٨٩٩

برنامج رحلتي في السادس

تمارين (4-7) ص 213

ت(١) اوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y=x^2$ والمستقيمين $x=1$ ، $x=2$ حول المحور السيني

الحل // $[1,2]$

$V=\pi\int_a^b y^2 dx \Rightarrow V=\pi\int_1^2 (x^2)^2 dx$

$=\pi\int_1^2 x^4 dx \Rightarrow V=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2=\pi\left[\frac{(2)^5}{5}-\frac{(1)^5}{5}\right]$

$=\pi\left[\frac{32}{5}-\frac{1}{5}\right]=\pi\left[\frac{31}{5}\right]=\frac{31}{5}\pi$ وحدة مكعبة

ت(٢) اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y=x^2+1$ والمستقيم $y=4$ حول المحور الصادي

نلاحظ ان التقية المفقودة نجدها

وذلك نفرض $x=0$ فيكون

$y=x^2+1$

اما اذا كان حول المحور السيني

$y=(0)^2+1 \Rightarrow y=1$

فنجعل $y=0$

$[1,4]$

الان الدالة يجب ان تكون بدلالة x

لانه حول المحور الصادي

$y=x^2+1$

$x^2=y-1$

$V=\pi\int_a^b x^2 dy \Rightarrow V=\pi\int_1^4 (y-1)dy$

$V=\pi\left[\frac{y^2}{2}-y\right]_1^4=\pi\left[\left(\frac{(4)^2}{2}-4\right)-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)\right]$

$=\pi\left[(8-4)-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

$=\pi\left[(4)+\frac{1}{2}\right]=\frac{9}{2}\pi$ وحدة مكعبة